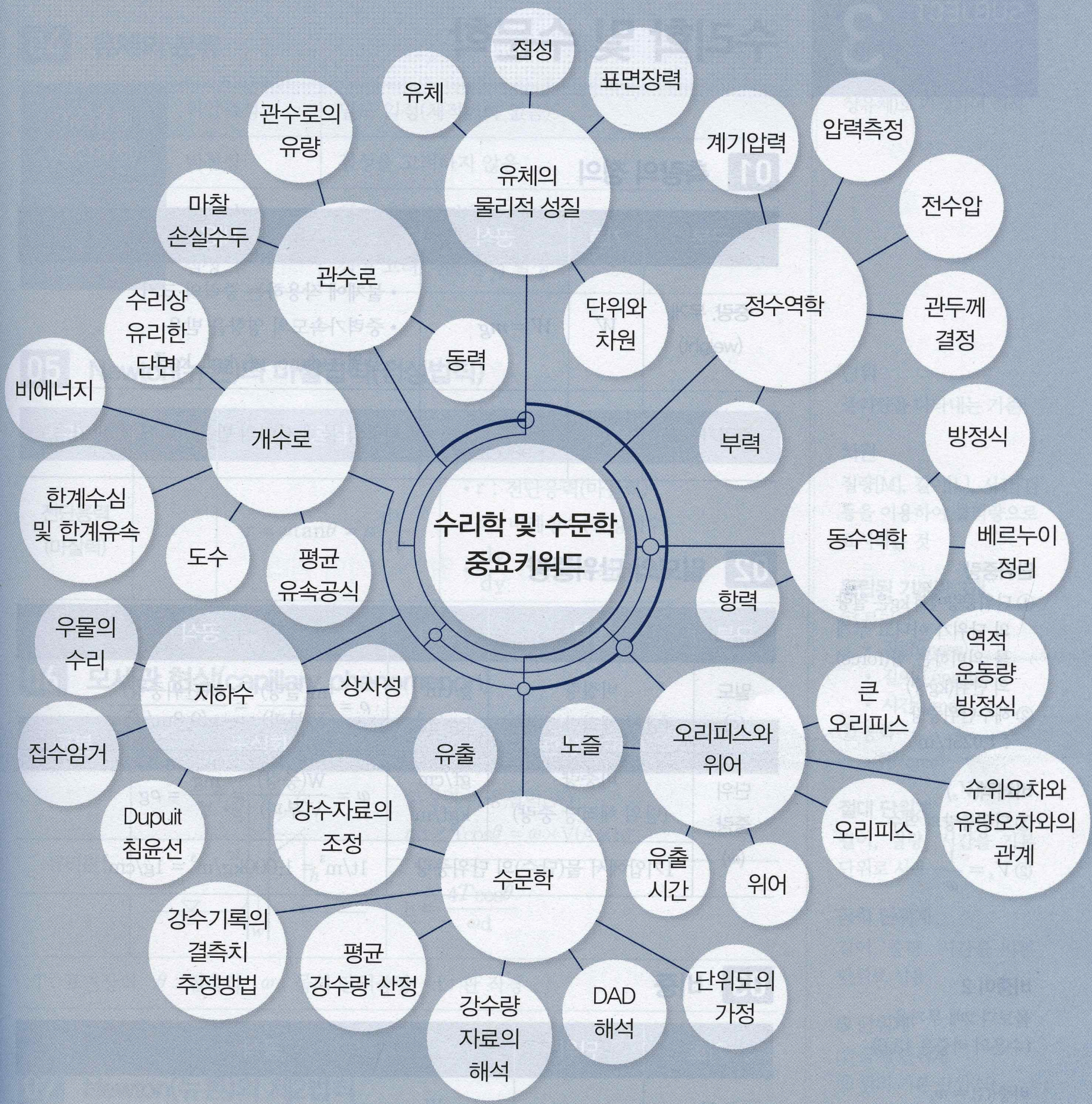
수리학 (I) 강의노트

교수　　이동주

2019년　8월　　31일

군산대학교 토목공학과 수리실험실



교수님 Talk Talk Talk

2018년 시행된 수리학 및 수문학의 출제경향을 살펴보면 전 단원에서 비슷한 비율로 고르게 출제되고 있습니다. 다만, 〈정수역학〉, 〈동수역학〉, 〈관수로〉, 〈개수로〉의 출제 비중이 다른 단원에 비해 조금 더 높게 출제 되었습니다. 〈수문학〉은 토목기사 시험에서만 출제되므로 산업기사를 준비하시는 분들은 수문학은 제외하시고 공부하시기 바랍니다.
특히 2018년에는 문제의 수준이 높아지면서 새로운 영역의 문제가 매 시험마다 1~2 문제씩 출제되고 있으니 만점 전략 보다는 80점 전략으로 공부하시는 것이 좋은 결과로 이어질 것입니다.

제1장 서론(INSTRODUCTION)

1.1 수리학의 정의

수리학(Hydroulics)은 **물의 물리적 성질과 역학적 거동**을 연구하며 실제적인 **수리구조물 설계**에 응용하는 과학의 한 분야(수리학= 물 + 역학)

1) 내용

물의 물리적 성질(Water property)

정수역학 (Hydrostatics)

동수역학 기초(Hydrodynamics)

관수로 흐름 해석(Pipe line flow analysis)

개수로 흐름 해석(Open channel flow analysis)

흐름의 측정(Flow mesurement)

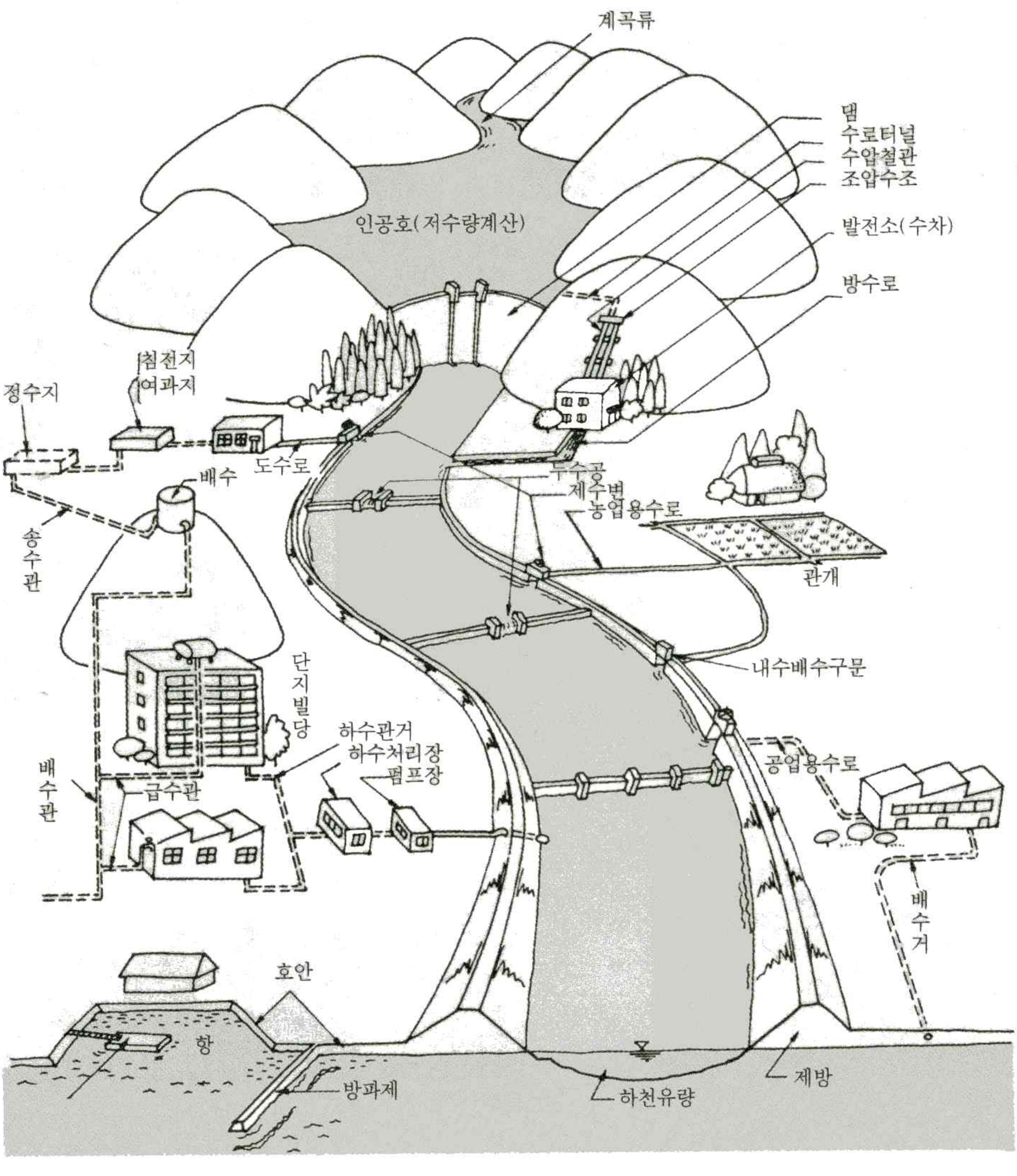
항력(Drag force)

유사이송(Sediment transport)

지하수 흐름 (Ground water flow)

! 주의: 수리학의 이론과 공식들은 유체역학의 이론으로부터 얻어지나 그러하지 않는 경우 **수리실험을 통해 경험식**을 만들어 사용한다.

수리계산이 필요한 구조물



2) 응용 학문 분야(이수 + 치수)

◦ 수공학(Hydroulic engineering)

하천공학, 해안공학, 항만공학, 상하수도 공학, 관개배수공학, 발전수력공학

◦ 수자원공학(Water resource engineering)

수문학(Hydrology), 댐공학(Dam engineering)

1.2 유체역학의 정의

1) 유체(물 + 기름 + 공기)

전단력이나 응력이 작용할 때 저항하지 않고 연속적으로 변형하는 물질

[수리학의 전단력은 내부마찰력]

2) 유체성질에 의한 분류

◦ 점성유체(Viscous fluid) = 실제유체

유체분자간이나 유체의 경계면 사이에서 전단력 또는 마찰력이 발생하는 유체

◦ 비점성유체(Inviscous fluid)

점성의 영향을 무시하고 운동상태를 나타낼 수 있는 유체

◦ 완전유체 또는 이상유체(Perfect fluid or Ideal fluid)

비점성, 비압축성 유체

1.3 물의 물리적 성질과 단위(Unit) 및 차원(Dimension)

1) 물리량의 정량적 표기법

물리량= 크기(숫자) + 단위

예) 힘(중량)= 5 kg

◦ 단위 종류

미터법(Meteric System) - cm, g, sec (CGS) or m, kg, sec (MKS)

영국단위계(British Unit System) - ft, lb, sec (GB)

국제단위계(System International Unit)- cm, dyne, sec or m, N, sec(SI)

단위제

- 국제단위제 (System International Unit)

절대단위계 [MLT] : kg_o, m, sec

$$1N = 1kg_o \times 1m/sec^2 = 1kg_o \cdot m/sec^2 = 10^5 g_o \cdot cm/sec^2 = 10^5 dyne$$

$$1kg = 9.8kg_o \cdot m/sec^2 = 9.8N$$

힘 : $F = m\alpha = 1\ kg_o \times 1m/sec^2$

$= 1\ kg_o \times m/sec^2 = 1$ Newton

$= 10^5\ g_o \times cm/sec^2 = 10^5$ dyne

$1\ kg = 9.8 \times 10^5$ dyne $= 9.8$ Newton

2) 차원

물리량을 단위의 크기에는 관계없이 **기본 단위의 조합관계**를 기호 [ ] 를 사용하여 표시

◦기본단위

절대단위 or 물리학단위(LMT계) : 길이(L), 질량(M), 시간(T)

공학단위 (LFT계) : 길이(L), 중량(F), 시간(T)

예) 물의 밀도의 물리학단위 차원[LMT계] = 질량 / 체적

[ρ] = [M] / [V]

= [M] / [L^3]

=[ML^{-3}]

힘의 차원 =질량x가속도

(F = m · α)

[F] = [M] [α] =[M] [LT^{-2}]=[LMT^{-2}]

$$[F] = \left[LMT^{-2}\right]$$

$$[M] = \left[L^{-1}FT^2\right]$$

물의 밀도의 공학단위 차원[LFT계]

[ρ] = [M] / [V]

=[ML^{-3}]

=[$L^{-1}FT^2$][L^{-3}]

=[FT^2L^{-4}]

<에제 1.1> 물의 밀도 ρ를 MKS 공학단위로 구하라.

(풀이) $w = \rho g$에서 $\rho = \dfrac{w}{g}$

$$w = 1000kg/m^3,\ g = 9.8m/\sec^2$$

$$\rho = \frac{1{,}000kg/m^3}{9.8m/\sec^2} = 102kg \bullet \sec^2/m^4$$

3) 물리의 기본 법칙

◦ 만유 인력 법칙

$$F = G\frac{MM'}{r^2}$$

◦ Newton의 운동법칙

① 제1법칙 - 관성의 법칙

② 제2법칙 - 운동의 법칙 : $\sum F = m\alpha$

③ 제3법칙 - 작용 반작용의 법칙

◦ 중력 가속도

$g = 980cm/\sec^2$

$= 9.8m/\sec^2$

$= 32.5ft/\sec^2$

4) 물의 물성치

◦ **밀도(density)** : 단위체적당 질량

$$\rho = \frac{m}{\forall} \; kg/m^3$$

* 담수(강물) : $\rho = 1g/cm^3 = 1000kg/m^3 = 1t/m^3$

$\rho = 102kg_f \bullet \sec^2/m^4$

◦ **물의 단위중량(Unit weight)** : 단위체적당 중량 w_0, w, γ_0 (문서에 따라 정의)

$W = mg$ kg중 or kgf

$w = \frac{W}{\forall} = \frac{mg}{\forall} = \rho g$ kgf/m^3

$\therefore w = \rho g \quad kg_f/m^3$

* 담수(강물) : w_0 또는 $\gamma_0 = 1g/cm^3 = 1000kg_f/m^3 = 1t/m^3$

* 해수(바닷물) : $w_s = 1.025g/cm^3 = 1025kg/m^3 = 1.025t/m^3$

◦ **비중(specific gravity)** : 어떤 물질의 무게와 같은 부피의 4℃때의 순수한 물의 무게 비 (단위가 없음, 무차원 [ ])

예) 해수의 비중 $s = w_s/w = 1.025(g/cm^3)/1(g/cm^3) = 1.025$

! 주의 : 물은 보통 1기압 4℃에 최대밀도가 되고, 4℃ 온도보다 상승하거나 강하시 감소, 압력이 증가하면 커짐 (표1-2참고).

◦ 물의 압축성과 탄성

물에의 압력이 P에서 P + dP로 증가할 때 체적이 V에서 dV로 감소하였다면 **압축계수** (α)는 체적변화율에 대한 압력변화의 비이고, **체적탄성계수(E_w)**는 압력변화에 대한 체적변화율의 비

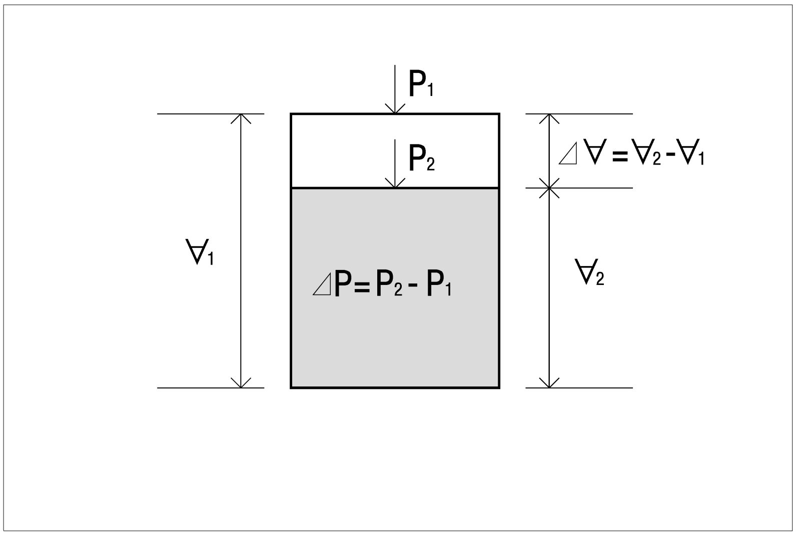
$$\alpha = -\frac{1}{\forall_o}\frac{d\forall}{dp} \fallingdotseq -\frac{\Delta\forall/\forall_o}{\Delta p}$$

$$\alpha = -\frac{1}{\forall_o}\frac{\forall_2 - \forall_1}{p_2 - p_1}$$

$$\forall_o = \frac{\forall_1 + \forall_2}{2}$$

$$E_w = \frac{1}{\alpha} = -\frac{\Delta p}{\Delta\forall/\forall_o}$$

! 주의 : 물은 0˚C, 1기압에서 500기압의 압력을 받아도 그 용적은 $5/10^5$ 정도 압축되므로 보통 물은 비압축성 유체로 취급



<예제 1.2> 수심 1300m 인 곳에서 물의 단위중량 w을 구하라. 단, 체적탄성계수 E_w=$2.1\times10^4 t/m^2$, 수면에서 물의 단위 중량 $w_s = 1t/m^3$이다.

(풀이) $p = wh = 1[t/m^3]\times 1300[m] = 1300[t/m^2]$

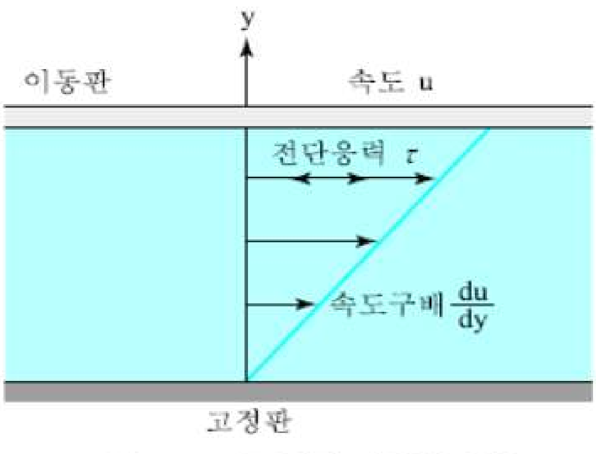
$$E_w = \frac{1}{\alpha} = -\frac{dp}{dV/V} = -\frac{dp}{\epsilon}$$

$$\epsilon = \frac{dV}{V} = \frac{dp}{E_w} = \frac{1300}{2.1\times 10^4} = 0.062,\ \widehat{V} = 1 - 0.062 = 0.938$$

$$w = \frac{W}{\widehat{V}} = \frac{1}{0.938} = 1.066[t/m^3]$$

◦ 물의 점성(Viscosity)

흐르는 물속에서 수심방향으로 층별로 속도가 다르다고 하면 상대운동을 하게 되어 내부마찰력이 발생된다. 그 마찰력 τ는 실험에 의해 다음식으로 표현된다.



$$\tau \propto \frac{\triangle u}{\triangle y}$$

Newton의 점성식:

$$\tau = (-)\mu \frac{du}{dy}$$

μ : 점성계수 $[ML^{-1}T^{-1}]$, $[FTL^{-2}]$

$$1\,poise = 1\,dyne \cdot \sec/cm^2 = 1g_o/\sec \cdot cm$$

$$= \frac{1}{980} g_f \cdot \sec/cm^2 = 100 centipoise$$

$$\mu = \frac{0.0197}{1 + 0.037\,T_0 + 0.000221\,T_0^2}$$

여기서 T_0는 온도(℃)

! 주의 : 점성은 온도에 반비례.

$\frac{1}{\mu}$: 유동성 또는 유동계수

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}$$

υ : 동점성계수 $[L^2T^{-1}]$

$$1 stoke = 1cm^2/\sec = 10^{-4}m^2/\sec = 100 centistoke$$

<예제 1.3> 간격 0.7cm의 평행한 평판 사이에 μ=0.04 g/cm・sec인 액체가 가득차 있다.

한족 평판을 고정하고 다른 쪽의 평판을 2.5m/sec의 속도로 이동할 때 판에 작용하는 전단 응력을 구하라.

(풀이) $\mu = 0.04 \times \frac{1}{980} = 4.08 \times 10^{-5}\ g_f \cdot \sec/cm^2$

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} = 4.08 \times 10^{-5} \times \frac{250}{0.7} = 0.0146\ g_f/cm^2$$

◦ 표면장력(surface tension) 과 모세관현상(capllarity)

물의 분자 상호 간의 인력을 응집력(cohesive force)이라 부르며, 작은 물입자를 공기중에 놓아 두면 물분자간의 응집력에 의해 구형에 가까워 지는 것처럼 , 수면에서는 응집력으로 인하여 탄력성을 갖게 되고 이 힘을 표면 장력(surface tention) σ 이라 하고, 단위는 $[FL^{-1}]$, g/cm 또는 dyne/cm 이다.

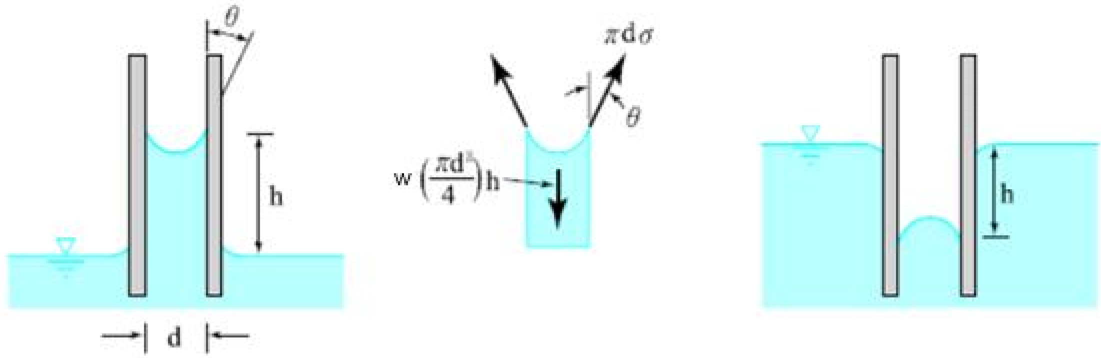
! 주의 : 물의 표면 장력은 온도에 반비례(표 1-6참고)

서로 다른 물질의 분자 사이의 인력은 부착력(adhesive force)라고 하고, 액체(물, 수은) 표면에 고체(유리)가 접하는 주변에는 접촉각(angle of contact) Θ가 물질의 종류에 따라 다르다. 물과 유리 : Θ = 8~9˚

수은과 유리 : 130~150˚

물 위에 직경이 작은 관을 세우면 표면장력과 부착력 때문에 관속의 수위가 상승하게 되는데 이 것을 모세관현상이라 하며 관의 직경(d)과 수면 상승고(h) 사이에는 다음과 같은 관계가 성립한다.

모세관내 수직 방향 힘의 평형 조건식 :



$$\sum V = 0$$

$$w\frac{\pi D^2}{4}h - (\pi D\sigma)\cos\theta = 0$$

$$h = \frac{4\sigma\cos\theta}{wD}$$

모관내 오목(볼록)한 수표면(meniscus)의 높이 a는 표면을 반경 r의 구면으로 생각하면 다음과 같다.

$$a = r(1-\sin\theta) = \frac{D}{2}\frac{1-\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$r = \frac{D}{2\cos\theta}$$

<예제 1.4> 지름이 8mm인 매끈한 유리관의 모관상승고와 유리판 사이 간격이 8mm일 때의 모세관 상승고를 각각 구한 후 이들의 비를 구하라. 단, Θ=0., σ=0.074 g/cm이다.

(풀이) 유리관의 모관 상승고 h_d라 하면

$$h_d = \frac{4\sigma\cos\theta}{wd} = \frac{4\times0.074\times\cos0^o}{1\times0.8}\ \frac{g_f/cm}{g_f/cm^3\ \bullet\ cm} = 0.37cm$$

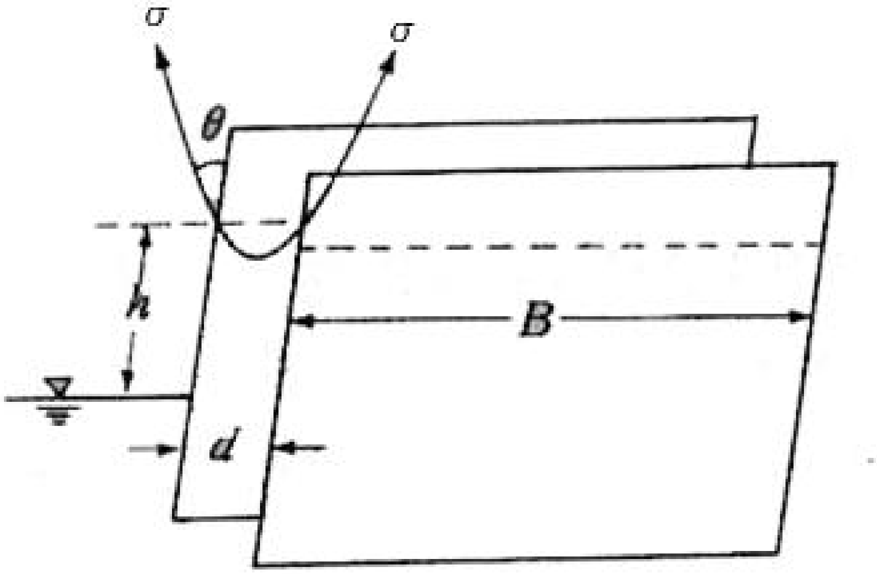
유리판 사이의 모관 상승고 h_p라 하면

$$h_p = \frac{2\sigma}{wd} = \frac{2\times0.074}{1\times0.8} = 0.185cm$$

$$\frac{h_d}{h_p} = \frac{0.37}{0.185} = 2$$

그림과 같이 평판 사이의 간격을 d라하고 평판의 폭을 B라할 때 두 개의 수직평판

사이의 모세관 높이 h는 다음과 같다.



$$2B\sigma\cos\theta = whBd$$

$$h = \frac{2\sigma}{wd}\cos\theta$$

<예제 1.5> 그림과 같이 빗방울의 형상은 실제로 타원구체(elliptical droplet) 형상으로 볼 수 있다. 이 경우 물방울 내외부의 압력차를 구하라.

(풀이) $A'B' = \Delta S_1 + \Delta S_1 \frac{\Delta R}{\Delta R_1} = \Delta S_1 (1 + \frac{\Delta R}{\Delta R_1})$

$B'C' = \Delta S_2 + \Delta S_2 \frac{\Delta R}{\Delta S_2} = \Delta S_2 (1 + \frac{\Delta R}{\Delta R_2})$

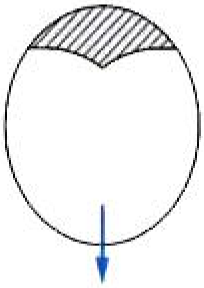
압력에 의한 일량 = 표면 장력에 의한 일량

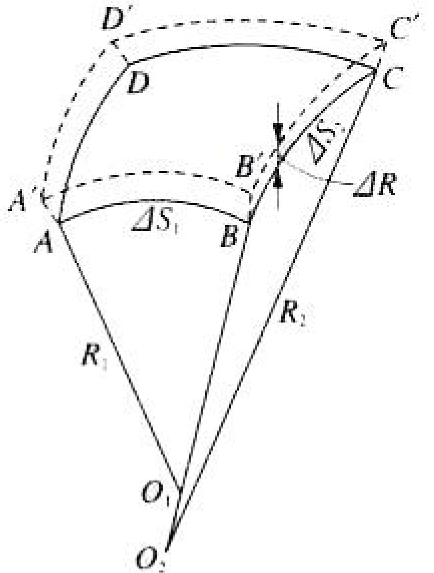
$$\Delta p \cdot (\Delta S_1 \cdot \Delta S_2) \cdot \Delta R = \sigma[\Delta S_1 (1 + \frac{\Delta R}{R_1}) \cdot \Delta S_2 (1 + \frac{\Delta R}{R_2}) - \Delta S_1 \cdot \Delta S_2]$$

$$= \sigma \Delta S_1 \cdot \Delta S_2 (1 + \frac{\Delta R}{R_1} + \frac{\Delta R}{R_2} + \frac{\Delta R^2}{R_1 \cdot R_2} - 1)$$

$$= \sigma \Delta S_1 \cdot \Delta S_2 \cdot \Delta R (\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2})$$

$$\Delta p = \sigma (\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2})$$



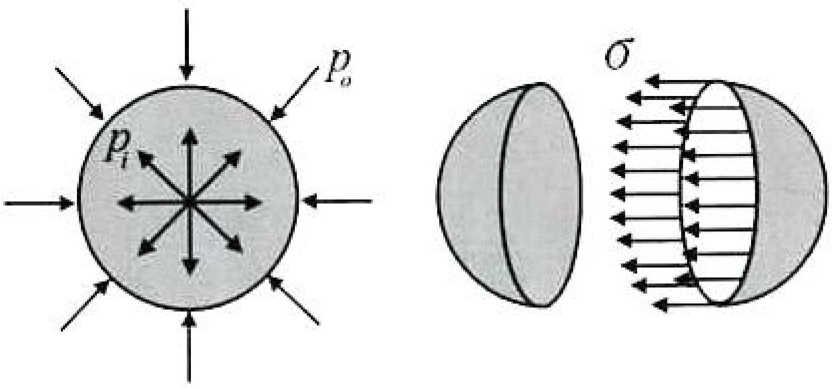


<예제 1.6> 그림과 같이 물방울을 구(sphere)로 가정 했을 때 내외부 압력차를 구하는 식을 유도하라.

(풀이) (압력차)x(단면적) = (표면장력)x((원주의 길이)

$$(p_1 - p_0)\pi R^2 = \sigma(2\pi R)$$

$$\Delta p = (p_1 - p_0) = \frac{2\sigma}{R}$$



제2장 정수역학(Hydrostatics)

2.1 정수역학의 정의

◦ 정수의 정의 :정지상태의 물
입자의 속도 유속 $V = L/t$
동수: V>0, 정수: V=0

◦ 물입자에 작용하는 힘
1) 표면력
- 수압(p), 인장응력(T), 전단응력(τ)
2) 질량력
- 중력(g), 코리올리 힘(f), 원심력(a_r)

!주의 : 정수인 경우 T=0, τ=0 이므로, 수압 p만 존재

◦ 정수역학 : 정지 상태인 물을 역학적으로 다루는 학문 분야
- 정수압 기본방정식(등압면)
- 압력의 전달(파스칼 원리, 수압기)
- 액주계(연직,경사, U자형, 시차, 미차)
- 수압계산(수평면,연직면, 경사면, 곡면)
- 부체(부력, 부체안정)
-상대정지(수평, 연직, 회전운동의 수면형)

2.2 대기압

1) 표준 대기압(1기압)
◦ 토리첼리 정리 : 수은주 760mm 인 경우 공기의 압력을 표준 대기압으로 정의

대기압 : $p_a = w_m h$
1기압(1 atm) = 760mmHg
수은의 단위중량 $w_m = 13.596 g_f/m^3$

$1\,atm = 13.596 \times 76 = 1033\; g_f/cm^2 = 1.033\, kg_f/cm^2$ (공학단위)

$= 1033 \times 980\, dyne/cm^2 = 1013 \times 10^3\; dyne/cm^2 = 1013\; milibar$ (기압단위)

$= 1.013\; \times 10^5 N/m^2 = 1013 \times 10^2\, Pa = 1013\; hPa$ (SI단위)

여기서 1N= 1 kg m /sec^2, 1 kg_f= 9.8 N, 1N= 10^5dyne, 1Pa=1 N/m^2,
1 hPa= 100 Pa

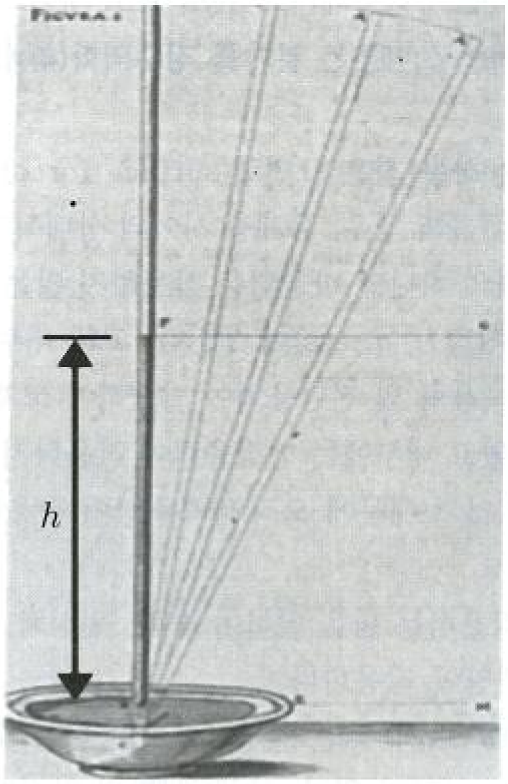
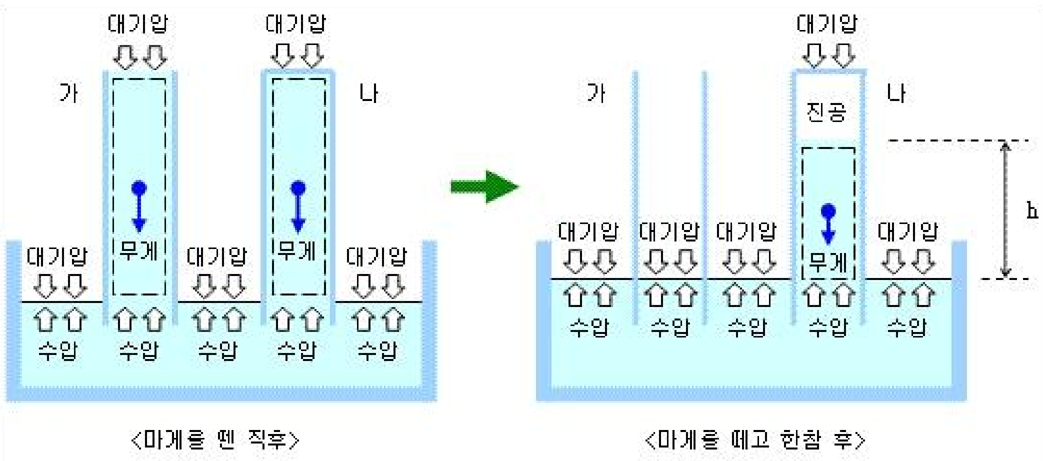


그림 2-1 Torricelli가 발명한 수은기압계



물기둥으로 환산하면

수은주를 수압으로 환산 : p = 760mmHg = 0.76m * 13.6t/m^3 = 10.33t/m^2

그런데 수압은 수심에 비례하므로 1atm를 수두로 환산하면

p= w · h에서

1기압 수두 : h = p / w

$$= \frac{10.33t/\text{m}^2}{1t/\text{m}^3}$$

= 10.33m

≒10m

· 절대압력과 계기압력 :

절대압력 = 대기압 + 압력(수압)

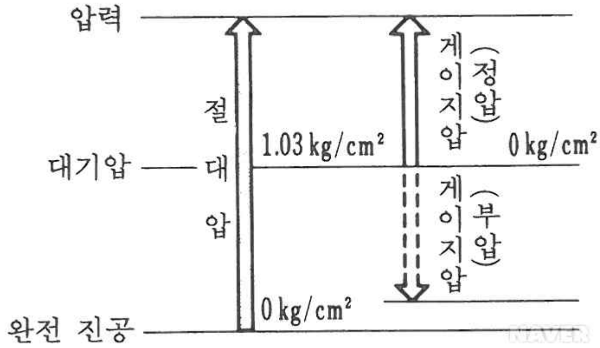
정(+)압 : $p_{abs} = p_a + p_g$

부(-)압 : $p_{abs} = p_a - p_v$

계기압력 = 압력(수압)

$p_g = wh$

*수리학에서 일반적으로 계기압력을 사용한다.



<예제 2.1> 대기압이 10t/m²일 때 압력계가 수은주 320mmHg를 지시 했다면 이때의 절대압력은 얼마인가? 단, 수은의 비중은 13.55이다.

(풀이) 부압 : $p_{abs} = p_a - p_v$

$$= 10\,t/m^2 - \frac{320}{1000}m\,(13.55\,t/m^3)$$

$$= 5.65\,t/m^2$$

<예제 2.2> 수면하 40m 지점의 압력을 kg/m^2로 구하고 수은주 높이로 표시하라. 또 이때의 절대압력응 얼마인가?

(풀이) $p = wh = 1{,}000kg/m^3 \times 40m = 40{,}000kg/m^2$

수은주 $h = \dfrac{p}{w_m} = \dfrac{40{,}000}{13.55 \times 1000} = 2.95m$

절대압력 $p_{abs} = p_a + p$이므로

$p_a = 13.55 \times 1000 \times 0.76 = 10{,}298kg/m^2$

$p_{abs} = 40{,}000 + 10{,}298 = 50{,}298kg/m^2 = 5.0298kg/cm^2$

2.3 정수압

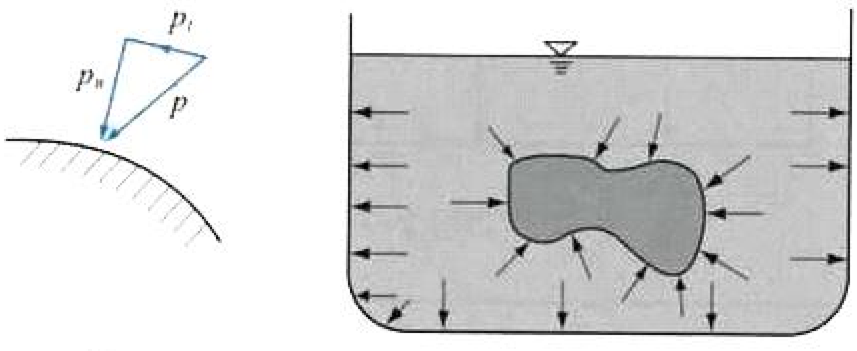
1) 정수압의 강도 : 정수중 단위 면적에 작용하는 수압의 크기를 정수압의 강도 또는 수압이라 한다.

$p = \frac{P}{A}$ [FL^{-2}], kg/cm^2, N/m^2, Pa

여기서 P: 전수압(t)

A: 수압 작용 면적(m^2)

2) 정수압의 작용방향: 모든 고체면에 직각으로 작용하다.

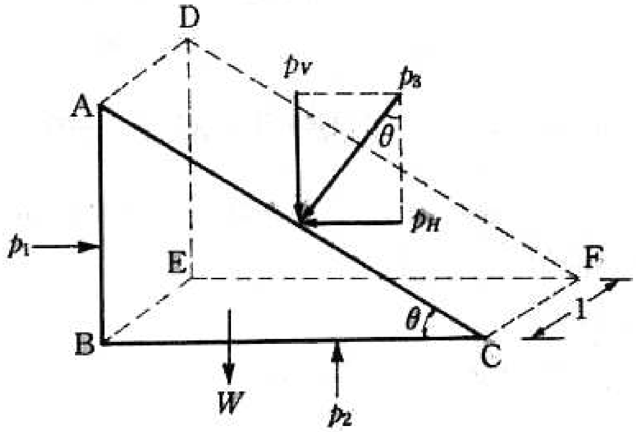


(a) (b)

! 주의 : 정수 중에서는 상대속도가 없으므로 전단응력(P_t)이 생기지 않으므로 고체면에 수직 방향으로 작용하는 수압(P_n)만 존재한다.

3) 정수중의 임의의 한 점에 작용하는 정수압은 방향에 관계없이 일정하다.

수중 임의 한점으로서 미소 삼각기둥($(\overline{AD} = \overline{BE} = \overline{CF} = 1)$에 대해 힘의 평형법칙을 적용하여 대표적으로 3방향의 수압강도 p_1, p_2, p_3를 비교해본다.



(i) 수평방향의 힘의 평형조건 ∑H=0

$$p_1\overline{AB}\times 1 - p_H\overline{AC}\times 1 = 0 \qquad (1)$$

$$p_H = p_3 \sin\theta$$

$$p_1\overline{AB} - p_3 \sin\theta \overline{AC} = 0 \qquad (2)$$

$$\overline{AB} = \overline{AC}\sin\theta, \overline{BC} = \overline{AC}\cos\theta$$

$$p_1\overline{AC}\sin\theta - p_3\overline{AC}\sin\theta = 0$$

$$p_1 = p_3 \qquad (3)$$

(ii) 수직방향의 힘의 평형조건 ∑V=0

$$p_2\overline{BC}\times 1 - p_V\overline{AC}\times 1 - W = 0 \qquad (4)$$

$$p_V = p_3\cos\theta, \quad W = \frac{1}{2}w\overline{AB}\,\overline{BC} \fallingdotseq 0$$

$$p_2\overline{BC} - p_3\cos\theta\overline{AC} = 0 \qquad (2)$$

$$\overline{AB} = \overline{AC}\sin\theta, \overline{BC} = \overline{AC}\cos\theta$$

$$p_2\overline{AC}\cos\theta - p_3\overline{AC}\cos\theta = 0$$

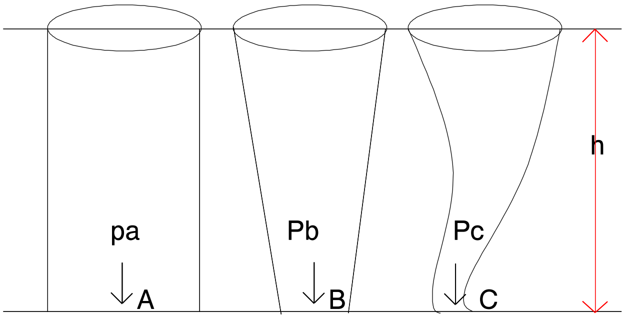
$$p_2 = p_3 \qquad (5)$$

$$p_1 = p_2 = p_3$$

4) 정수중의 임의의 한 점(면)에 작용하는 정수압은 수심에 비례한다.

p = w · h

수두(water head) ; $h = \frac{p}{w}$ [L], m



정역학 평형법칙 :

$$\sum H = 0, \sum V = 0, \sum M = 0$$

p=wh 증명:

$$\sum V = (p + \frac{\partial p}{\partial z}\frac{dz}{2})dxdy - (p - \frac{\partial p}{\partial z}\frac{dz}{2})dxdy - wdxdydz = 0$$

$$\frac{\partial p}{\partial z}dz = wdz$$

$$dp = wdz$$

$$\int dp = \int wdz$$

p= wz + c

z=0, c=pa(대기압) 이므로

h=-z

절대압력 ; p=wh + pa

계기압력 ; p=wh

<예제 2.3> 서로 혼합되지 않는 유체가 그림과 같이 층을 이루고 있다. 액면으로부터 5m 깊이에 있어서 수압을 구하라. 여기서 액체의 비중은 다음과 같다.

$$s_1 = 0.75 \qquad h_1 = 1m$$
$$s_2 = 0.83 \qquad h_2 = 2m$$
$$s_3 = 1.00 \qquad h_3 = 3m$$

(풀이) h=1m점의 압력

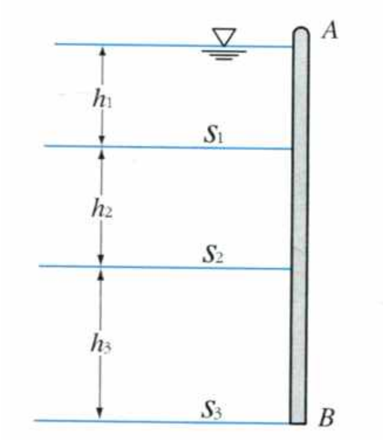
$$p_1 = w_1 h_1 = (s_1 w) h_1 = 0.75 \times 1t/m^3 \times 1m = 0.75t/m^2$$

h=3m점의 압력

$$p_2 = p_1 + w_2 h_2 = 0.75 + 0.83 \times 2 = 2.41t/m^2$$

h=5m점의 압력

$$p_5 = p_2 + w_3[5-(h_1+h_2)] = 2.41 + 1 \times 2 = 4.41t/m^2$$



2.4 정수역학 기본 방정식

다음과 같이 정수중에 유체요소로 미소직육면체 dxdydz를 생각하면 여기에 작용한 힘은 질량력과 표면에 작용하는 수압이다.

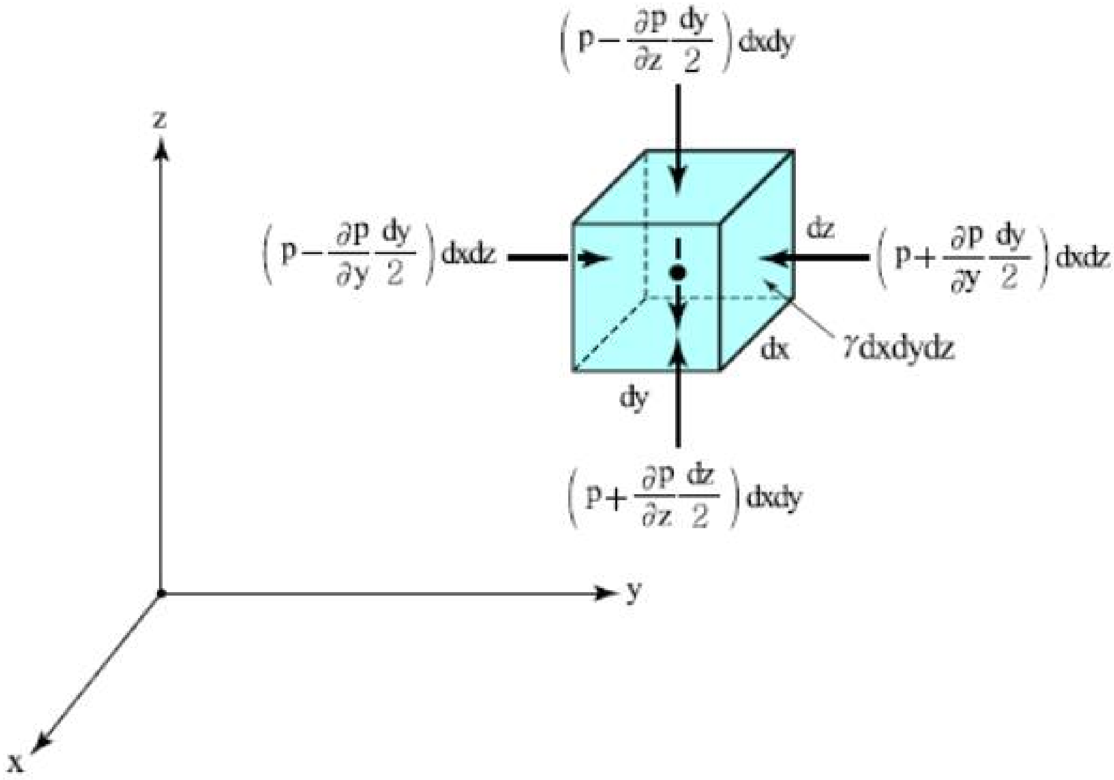
Taylor급수 전개:

$$\Phi[x \pm \frac{\Delta x}{2}] = \Phi(x) \pm \frac{1}{2}[\frac{\partial \Phi}{\partial x}\frac{\Delta x}{1!}] + \frac{1}{4}[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}\frac{\Delta x^2}{2!}] \pm \frac{1}{8}[\frac{\partial^3 \Phi}{\partial x^3}\frac{\Delta x^3}{3!}] \cdots$$

$$p(y+\frac{\Delta y}{2}) \fallingdotseq p(y) + \frac{\partial p}{\partial y}\frac{\Delta y}{2}$$

$$p(y-\frac{\Delta y}{2}) \fallingdotseq p(y) - \frac{\partial p}{\partial y}\frac{\Delta y}{2}$$

$$p(z-\frac{\Delta z}{2}) \fallingdotseq p(z) - \frac{\partial p}{\partial z}\frac{\Delta z}{2}$$



Newton의 운동 제2법칙 $\sum \vec{F} = m\alpha$ 정수조건 α=0

x, y, z방향의 단위 질량당 질량력을 X, Y, Z라 하면 힘의 평형조건(정역학 평형법칙) $\sum Fx = 0, \sum Fy = 0, \sum Fz = 0$ 으로부터

$$\sum Fx = pdydz - (p + \frac{\partial p}{\partial x}dx)dydz + \rho Xdxdydz = 0$$

$$\sum Fy = pdxdz - (p + \frac{\partial p}{\partial y}dy)dxdz + \rho Ydxdydz = 0$$

$$\sum Fz = pdxdy - (p + \frac{\partial p}{\partial z}dz)dxdy + \rho Zdxdydz = 0$$

위 식을 정리하면

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho X$$
$$\frac{\partial p}{\partial y} = \rho Y$$
$$\frac{\partial p}{\partial z} = \rho Z$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} dx = \rho X dx$$
$$\frac{\partial p}{\partial y} dy = \rho Y dy$$
$$\frac{\partial p}{\partial z} dz = \rho Z dz$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz = \rho (X dx + Y dy + Z dz)$$

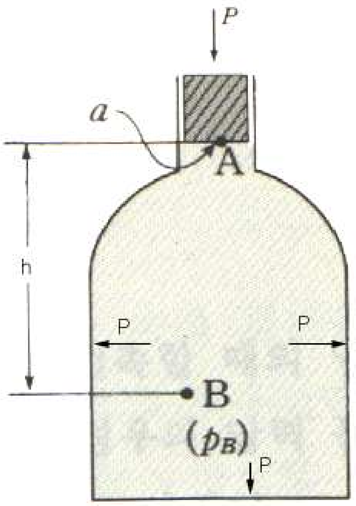
전미분: $dp = \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz$

정압력의 기본식:
$dp = \rho (X dx + Y dy + Z dz)$

등압면의 식:
$X dx + Y dy + Z dz = 0$

2.5 압력의 전달

· Pascal의 원리
: 밀폐된 용기 속에 가해진 압력의 증가는 용기 벽면에 고르게 전달된다.



A점의 압력을 P라 하면

$$p = \frac{P}{a}$$

B점의 압력을 P_B라 하면

p_B = p + w_0h

$$= \frac{P}{a} + w_0 h$$

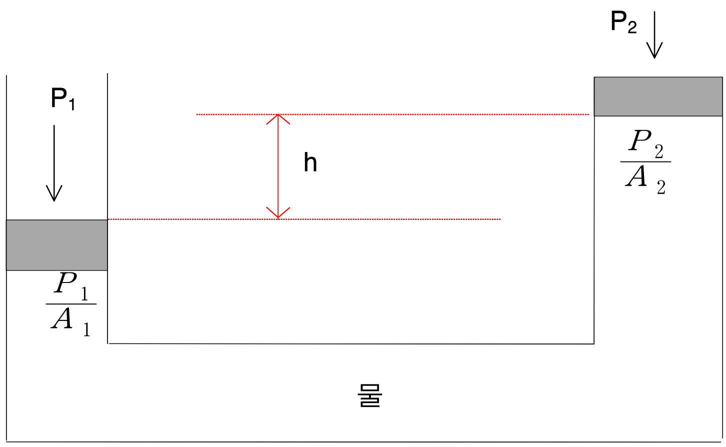
이 때 압력이 P에서 P + ΔP로 증가하면

B점의 압력은 $p_B = \dfrac{P+\Delta P}{a} + w_0 h$

$$= \frac{P}{a} + \frac{\Delta P}{a} + w_0 h$$

∴B점의 압력은 일정하게 $\dfrac{\Delta P}{a}$만큼 증가한다.

· 수압기 : Pascal의 원리를 이용하여 적은 힘으로 큰 힘을 얻는 기기

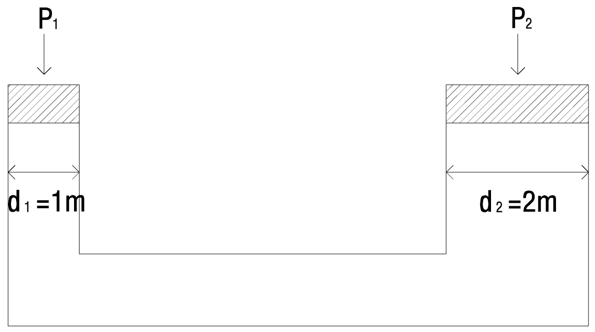


$$\frac{P_1}{A_1} = \frac{P_2}{A_2} + w_0 h$$

w_0h는 P_1, P_2에 비하여 매우 적으므로 무시하면

$$\frac{P_1}{A_1} = \frac{P_2}{A_2}$$

<예제 2.2> 다음 그림의 수압기에서 $P_1 = 1t$이 작용하면 P_2를 구하라.



(풀이) $\dfrac{P_1}{A_1} = \dfrac{P_2}{A_2}$

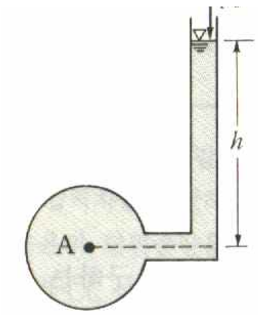
$$\frac{P_1}{\frac{\pi d_1^2}{4}} = \frac{P_2}{\frac{\pi d_2^2}{4}}$$

$$P_2 = \frac{2^2}{1^2} P_1 = 4 \times 1 = 4t$$

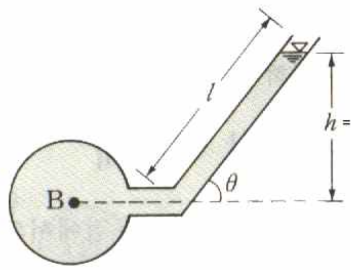
$\therefore$ P_2 = 4t

2.6 압력의 측정

ⓐ 액주계(Manometer)
압력을 측정하는 기기



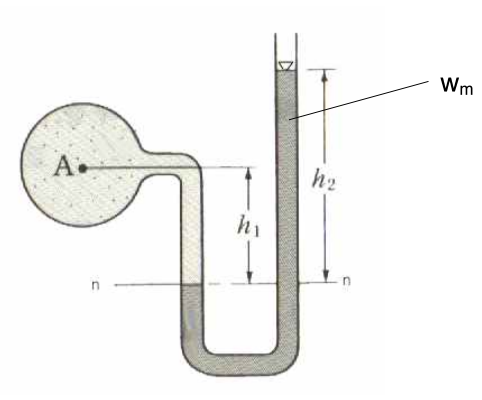
$p_A = w_0 h$(g/㎠)



$p_B = w_0 h = w_0 l \sin\Theta$

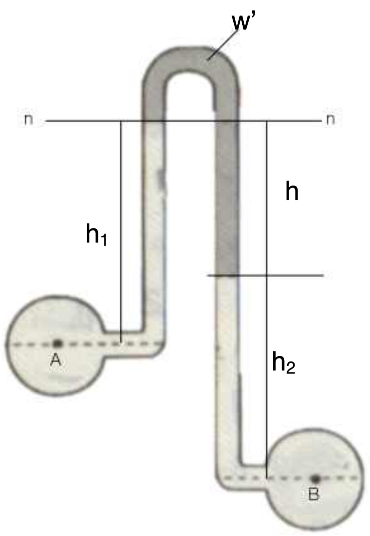
ⓑ u 자형 액주계(u-type manometer)

정립 U 자형 액주계는 물보다 무거운 수은(w_m=13.55g/cm^3)을 액주액으로 사용하고 A점의 수압 p_A 는 다음과 같이 구한다.



$$p_A + w_0h_1 = w_mh_2$$
$$\therefore p_A = w_mh_2 - w_0h_1$$

역 U자형 애주계는 사염화탄소($w'=0.6g/cm^3$)와 같은 물보다 가벼운 액주액으로 사용한다.



$$p_A - w_0h_1 = p_B - w_0h_2 - w'h$$

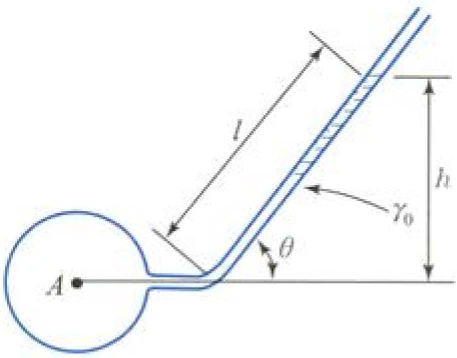
$$p_A - p_B = w_0(h_1 - h_2) - w'h$$

<예제 2.3> 압력 p_A를 계산하라.

(풀이) $h = l\sin\theta = 10\,cm \times \sin 30^\circ = 5cm$

$r_0 = 1{,}200\,kg/m^3 = 1.2\,g/cm^3$문제 2-05 그림 2-13과 같은 경사수압관에서 $\theta = 30^\circ$, $l = 10\,cm$, $r_0 = 1{,}200\,kg/m^3$일 때의

$\therefore p_A = r_0 h = 1.2 \times 5 = 6\,g/cm^2$



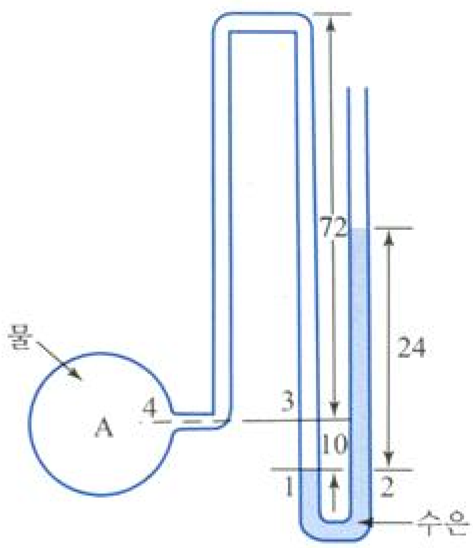
<예제 2-4> 그림과 같은 액주계에서 A점의 수압응 계산하라. 액주게 유체는 수은이며 측정 단위는 cm이다.

(풀이) $p_1 = p_2,\ \ p_3 = p_4$

$p_1 = p_3 + 1.0 \times 10 = (p_A + 10)\,g/cm^2$

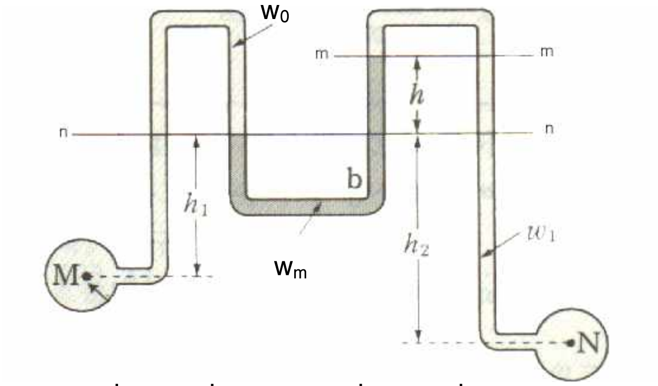
$p_2 = 13.6 \times 1.0 \times 24 = 326.4g/cm^2$

$p_A = 316.4g/cm^2$



ⓒ 시차(示差)액주계(differential manometer)

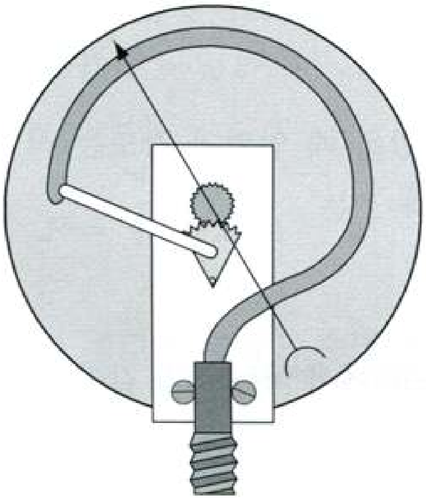
: 미소한 압력차를 측정

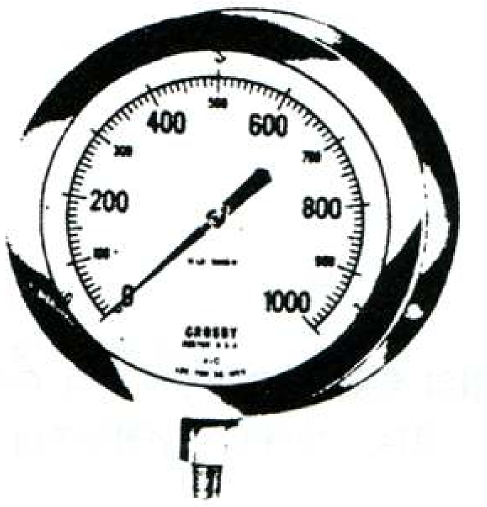


$$p_M - w_0h_1 + w_0h = p_N - w_0h_2 + w_Mh$$

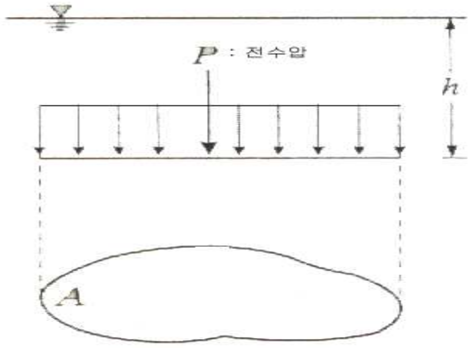
$$\therefore\ p_M - p_N = w_0(h_1 - h_2) + h(w_m - w_0)$$

Ⓓ BOURDON 압력계 (기계식 압력계)





2.7 수평 평면에 작용하는 정수압

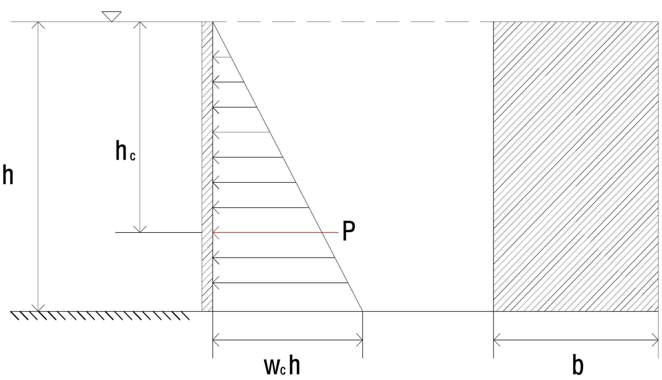


A. 수평면과 평행한 평면일 때
전수압은 평면 A를 밑면으로 하는 연직 수주의 무게와 같다.
즉 P = wh · A

<예제 2.5> 수면 아래 5m인 점에 평판(3mx5m)을 수평으로 놓았을 때 평판이 받는 총 압력을 구하라.

(풀이) P=whA
= $1t/m^3 \times 5m \times (5 \times 3)m^2 = 75t$

B. 수면과 연직한 평면일 때
① 윗면이 수면과 일치할 때(직사각형 평면)



1) 전수압 : P

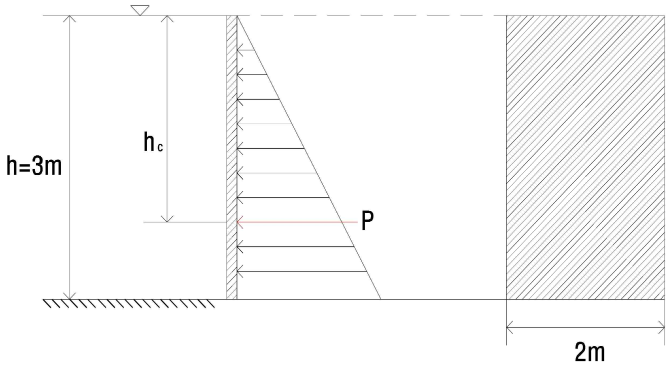
$$P = \frac{w_0 h \times h}{2} \times b$$

$$= \frac{1}{2} w_0 b h^2$$

2) 수면에서 전수압이 작용하는 지점까지의 거리 : h_c

$$h_c = \frac{2}{3} h$$

<예제 2.6> 수면과 연직한 평면일 때연직 평면에 작용하는 전수압(P)와 작용점의 위치(h_c)를 구하라.



(풀이)

1) 전수압 P:

$$P = \frac{1}{2}wbh^2$$

= 1/2x8x1t/m^3 x 2m x (3m)^2

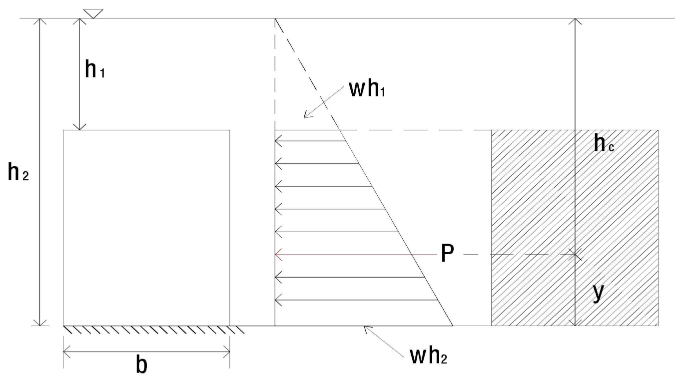
= 9t

2) 작용점까지의 거리 : hc

hc = 2/3h

= 2/3 x 3m = 2m

C. 윗면이 수중에 있을 때 (직사각형 단면)



1) 전수압 : P

$$P = \frac{(wh_2 + wh_1) \times (h_2 - h_1)}{2} \times b$$

$$= \frac{1}{2}wb(h_2^2 - h_1^2)$$

2) 작용점까지의 거리 : hc

$$y = \frac{h}{3} - \frac{a+2b}{a+b}$$

$$(y' = \frac{h}{3} - \frac{2a+b}{a+b})$$

$$h_c = h_1 + \frac{h_2 + h_1}{3} \times \frac{w_0 h_1 + 2w_0 h_2}{w_0 h_1 + w_0 h_2}$$

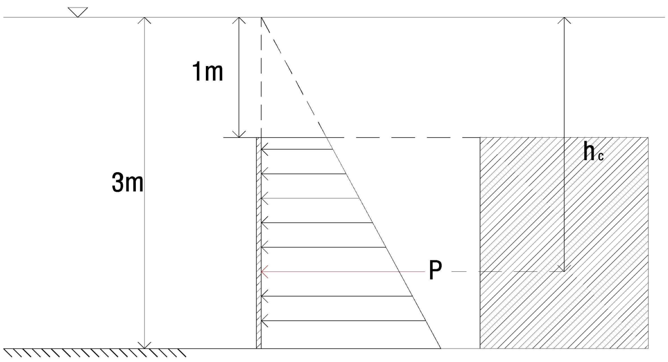
$$= \frac{3h_1(h_1+h_2)+(h_2-h_1)(h_1-h_2)}{3(h_1+h_2)}$$

$$= \frac{3h_1^2+3h_1h_2+h_1h_2+2h_2^2-h_1^2-2h_1h_2}{3(h_1+h_2)}$$

$$= \frac{2h_1^2+2h_2h_2+2h_2^2}{3(h_1+h_2)}$$

$$= \frac{2}{3} \times \frac{h_1^2+h_1h_2+h_2^2}{h_1+h_2}$$

<예제 2.7> 윗면이 수중에 있는 있을 때 (직사각형 단면) 연직평면에 작용하는 전수압 및 작용점의 위치를 구하라.



1) 전수압 : P

P = $\frac{1}{2}wb(h_2^2 - h_1^2)$

= (1 / 2) x 1 x 2(4^2 - 1^2)

= 15t

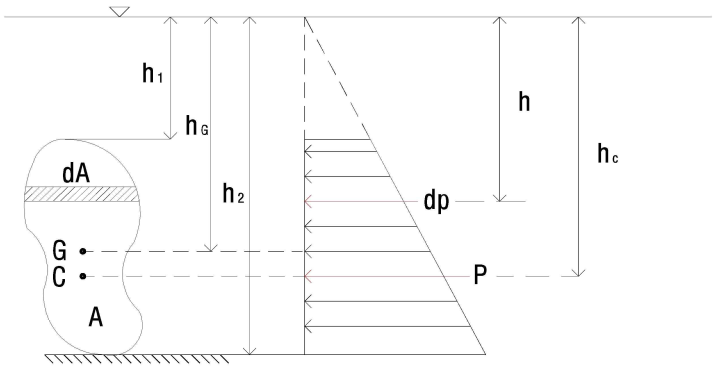
2) 작용점까지의 거리 : hc

$$h_c = \frac{2}{3} \times \frac{h_1^2+h_1h_2+h_2^2}{h_1+h_2}$$

$$= \frac{2}{3} \times \frac{1^2+4\times4+4^2}{1+4}$$

= 2.8m

D. 임의의 연직평면일 때



h_G : 수면에서 도형의 도심(중심)까지의 거리

미소단면 dA에 작용하는 수압을 dp라 하면

$dP = p \cdot dA = wh \cdot dA$ ------------ ①

그런데, 전단면(A)에 작용하는 수압은 ①식을 전단면에 대하여 적분하면 된다.

$\therefore$ $P = \int_A whdA = w\int_A hdA$

* $\int hdA$: 수면에 대한 단면1차모멘트이며 h_G에 A를 곱한 값과 같다.

$$\int_A hdA = h_G A$$

∴전수압 : P

⑤ - $P = wh_G A$

Varignon의 정리

: 합력에 의한 모멘트는 분력에 의한 모멘트의 合과 같다.

그림에서 $P \times hc = \int dp \times h$

$= \int whdA \cdot h$

$= w\int h^2 dA$

* $\int h^2 dA$: 수면에 대한 단면2차 모멘트

$$I = \int h^2 dA$$

이 때 도형의 도심을 통과하는 축에 대한 단면 2차 모멘트를 I_0라 하면

$I = I_0 + h_G{}^2 A$

위식에 대입하면

$\therefore$ $P \times hc = w(I_0 + h_G{}^2 A)$

$$\therefore \text{hc} = \frac{w(I_0 + h_G^2 A)}{P}$$

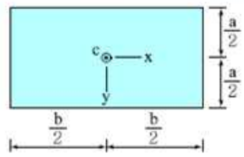
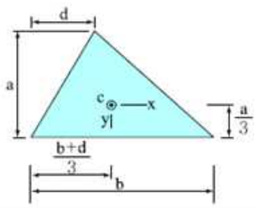
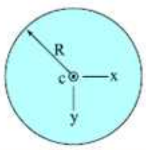
$$= \frac{w(I_0 + h_G^2 A)}{w h_G A}$$

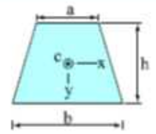
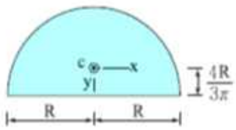
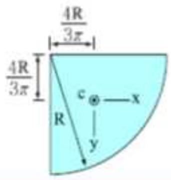
$$= \frac{I_0}{h_G A} + h_G$$

작용점까지의 거리 : hc

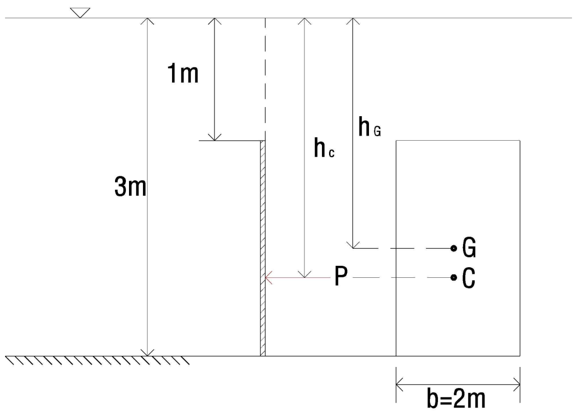
⑥ - $hc = h_G + \dfrac{I_0}{h_G A}$

표 2.8.1 각종 형태의 도심, 단면적 및 단면 2차모멘트

단면 형태	A	I_{xc}	I_{yc}	I_{xyc}
	ba	$\frac{1}{12}ba^3$	$\frac{1}{12}ab^3$	0
	$\frac{ab}{2}$	$\frac{ba^3}{36}$	−	$\frac{ba^2}{72}(b-2d)$
	πR^2	$\frac{\pi R^4}{4}$	$\frac{\pi R^4}{4}$	0

	$\frac{h}{2}(a+b)$	$\frac{h^3(a^2+4ab+b^2)}{36(a+b)}$	-	-
	$\frac{\pi R^2}{2}$	$0.1098R^4$	$0.3927R^4$	0
	$\frac{\pi R^2}{4}$	$0.05488R^4$	$0.05488R^4$	$-0.01647R^4$

<예제 2.8> 윗면이 수중에 있는 있을 때 (직사각형 단면) 연직평면에 작용하는 전수압 및 작용점의 위치를 구하라.



① 전수압 : P

P = wh_GA

= 1 x 2.5 x 2 x 3 = 15t

② 작용점까지의 거리 : hc

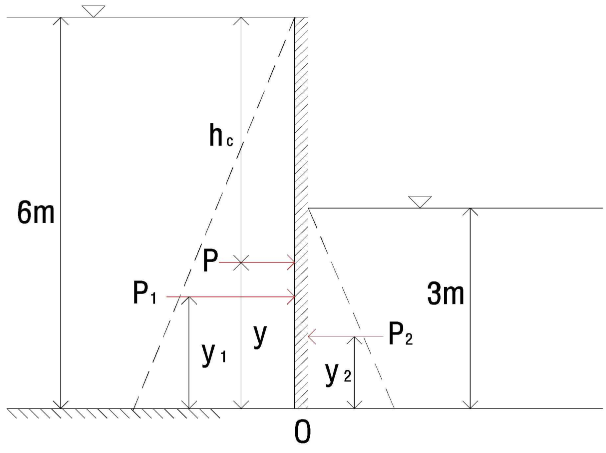
hc = h_G + $\frac{I_0}{h_GA}$

= $h_G + \frac{\frac{bh^3}{12}}{h_GA}$

$$= 2.5 + \frac{\frac{2 \times 3^3}{12}}{2.5 \times (2 \times 3)}$$

$$= 2.8\text{m}$$

<예제 2.9> 폭 3m의 판으로 수로를 막았을 때 전수압 및 작용점의 위치를 구하라.



① 전수압 : P

$P_1 = w_0 h_{G1} A$

$= 1 \times (6/2) \times (3 \times 6) = 54\text{t}$

$P_2 = w_0 h_{G2} A$

$= 1 \times (3/2) \times (3 \times 3) = 13.5\text{t}$

$\therefore\ P = P_1 - P_2 = 54 - 13.5 = 40.5\text{t}$

② 작용점까지의 거리 : h_c

$y_1 = \frac{1}{3} h_1 = (1/3) \times 6 = 2\text{m}$

$y_2 = \frac{1}{3} h_2 = (1/3) \times 3 = 1\text{m}$

$\sum M_0 = 0$

$P \times y = P_1 \times y_1 - P_2 \times y_2$

$40.5 \times y = 54 \times 2 - 13.5 \times 1$

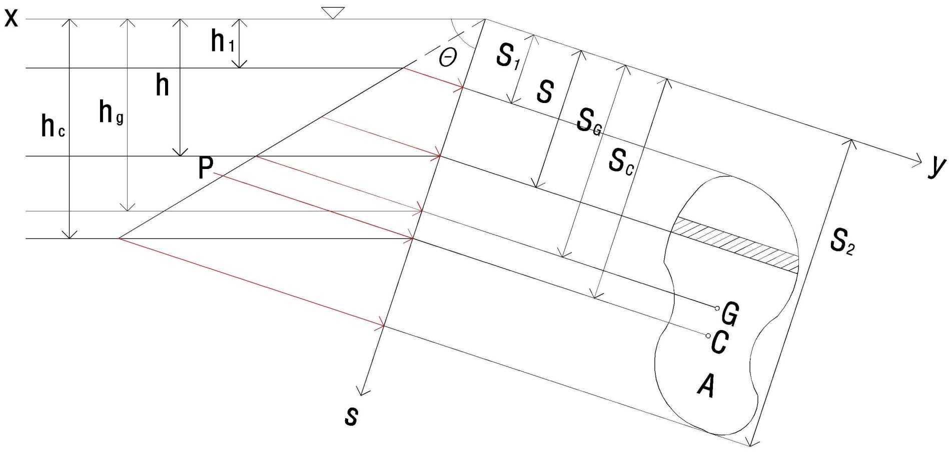
$\therefore\ y = \frac{108 - 13.5}{40.5} = 2.33\text{m}$

$\therefore\ h_C = h_1 - y$

$= 6 - 2.33$

$= 3.67\text{m}$

F. 임의의 경사평면일 때



$h_1 = S_1 \sin\Theta$

$h = S \sin\Theta$

$h_G = S_G \sin\Theta$

$hc = Sc \sin\Theta$

$h_2 = S_2 \sin\Theta$

① 전수압 : P

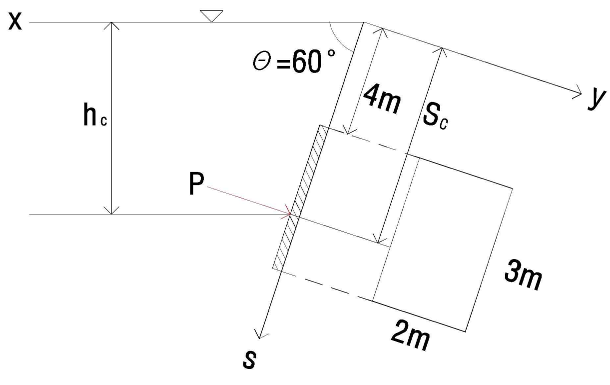
$P = wh_G A = wS_G \sin\Theta\ A$

②작용점까지의 거리 : h_C

$$S_C = S_G + \frac{I_0 y}{S_G A}$$

$\therefore h_C = S_C \sin\Theta$

<예제 2.10> 직사각형 단면 경사평면에 작용하는 전수압 및 작용점의 위치를 구하라.



(풀이) ① 전수압 : P

$$P = wh_G A = 1 \times (5.5 \times \sin 60°) \times (2 \times 3)$$
$$= 28.58t$$

② 작용점까지의 거리 : h_C

$$h_C = S_C \sin\Theta \quad (S_C = S_G + \frac{I_0}{S_G A})$$

$$S_C = 5.5 + \frac{2 \times 3^3/12}{5.5 \times (2 \times 3)} = 5.64m$$

$$h_C = 5.64m \times \sin 60° = 4.88m$$

<예제 2.11> 그림과 같이 수문 AB 및 AC에 작용하는 폭 1m당의 전수압과 그 작용점의 위치를 계산하라. 여기서 AB=5m, AC=6m이다.

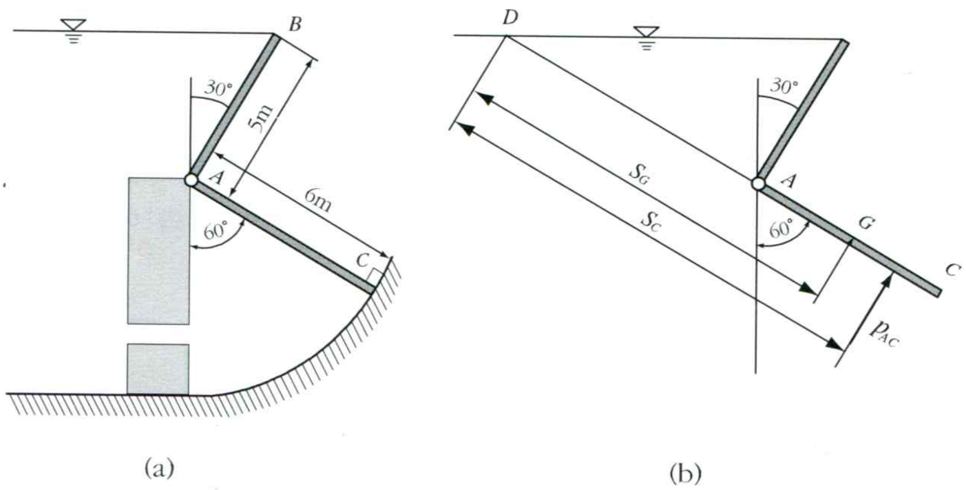


그림 2-24

(풀이) AB면에 작용하는 전수압 및 작용점 위치

$$h_G = S_c \sin\theta = \frac{\overline{AB}}{2}\sin(90° - 30°) = \frac{5}{2} \times \sin 60°$$

$$= \frac{5}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$P_{AB} = wh_G A = 1 \times (\frac{5}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}) \times (5 \times 1) = 10.83t$$

$$S_c = S_G + \frac{I_G}{S_G A} = 2.5 + \frac{\frac{1 \times 5^3}{12}}{2.5 \times (5 \times 1)} = 3.33m$$

$$h_c = S_C \sin\theta = 3.33 \times \sin 60^\circ = 2.88m$$

AC면에 작용하는 전수압 및 작용점 위치

$$h_G = \overline{AB}\cos\theta + \frac{\overline{AC}}{2}\cos\theta$$

$$= 5 \times \cos 30^\circ + \frac{6}{2}\cos 60^\circ = 5.83m$$

$$P_{AC} = wh_G A = 1 \times 5.83 \times (6 \times 1) = 34.98\,t$$

$$S_C = \overline{AD} + \frac{\overline{AC}}{2} = \overline{AB}\cot 30^\circ + \frac{\overline{AC}}{2}$$

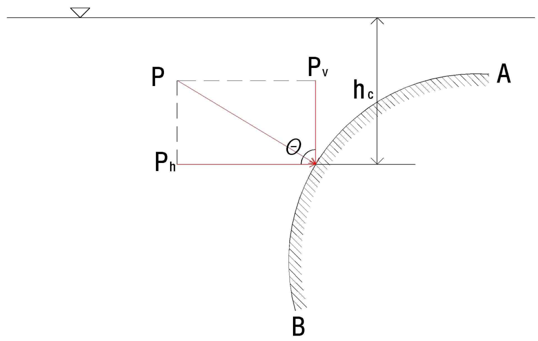
$$= 5 \times \sqrt{3} + 3 = 11.66m$$

$$S_G = S_C + \frac{I_G}{S_G A}$$

$$= 11.66 + \frac{\frac{1 \times 6^3}{12}}{11.66 \times (6 \times 1)} = 11.92m$$

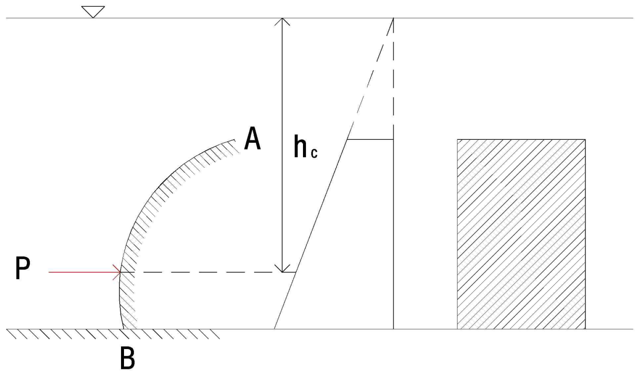
$$h_C = S_C \cos 60^\circ = 11.92 \times \frac{1}{2} = 5.96m$$

G. 곡면에 작용하는 정수압



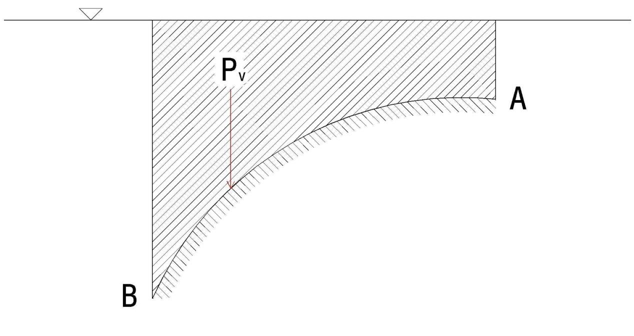
① 수평분력 : $P_H = wH_GA$

곡면 AB를 연직 투영면에 투영시킨 평면으로 생각하여 계산



② 연직분력 : $P_V = w\overline{V}$

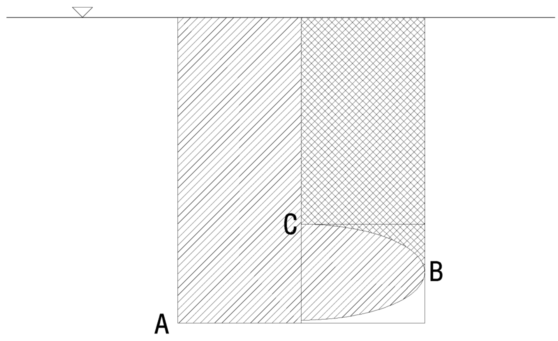
곡면 AB를 밑면으로 하는 연직 수주의 무게($\overline{V}$)와 같다.



전수압 P = $\sqrt{P_H^2 + P_V^2}$

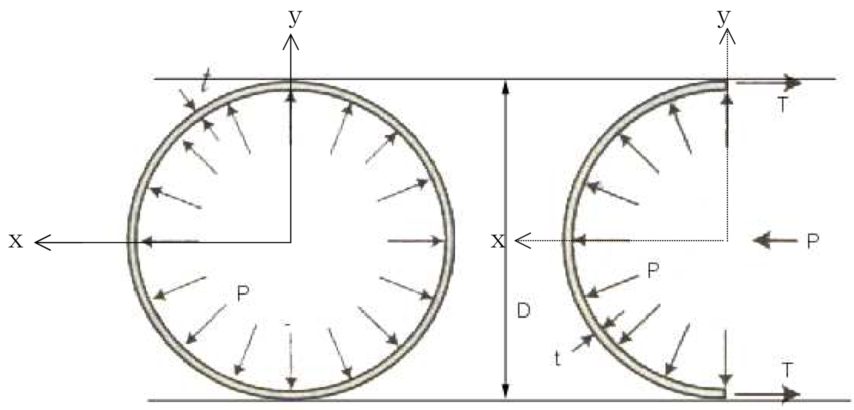
작용점까지의 거리 : $h_C = h_G + \frac{I_0}{h_G A}$

③ 중복되는 경우



. 원관에 작용하는 정수압

곡면 AB를 밑면으로 하는 연직수주무게 - 곡면 BC를 밑면으로 하는 연직수주무게



D : 관경, l : 관길이, T : 장력, σ_{ta} : 허용인장응력, t : 관벽의 두께
원관을 모든 조건에 대하여 동일하므로 반원만을 생각하면 된다.
힘의 평형에서

$$P = 2T$$
$$P = p \cdot d \cdot l$$
$$T = t \cdot \sigma_{ta} \cdot l$$
$$p \cdot d \cdot l = 2t \cdot \sigma_{ta} \cdot l$$

$t = \dfrac{pd}{2\sigma_{ta}}$: 주장력 공식

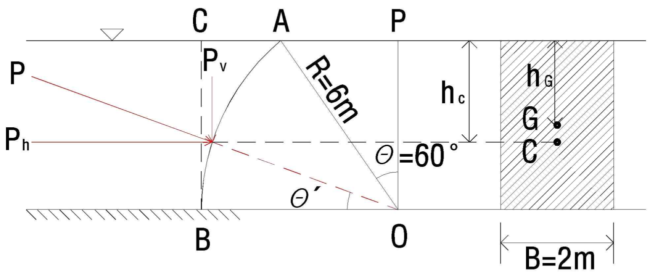
※ 이때 외부로부터 일정한 압력 P가 작용한다면 σ_{ta} 대신 σ_{ca}를 사용
σ_{ca} : 허용압축응력

<예제 2.12> 내경 1m 강관에 압력수두 100m의 물이 흐르게 하려면 강관의 최소 두께는 얼마가 되어야 하나? 단, 강재의 허용인장응력을 $1{,}100kg/cm^2$라 한다.

(풀이) $p = wH = 1{,}000 \times 100kg/m^2 = 10kg/cm^2$

$$t = \frac{pD}{2\sigma_{ta}} = \frac{10 \times 100}{2 \times 1{,}100} = 0.45cm \fallingdotseq 5mm$$

<예제 2.13> 폭 2m인 tainter gate의 곡면에 작용하는 전수압과 작용점의 위치를 구하라.



① 전수압 : P

· 수평분력 : P_H

$P_H = w_0 h_G A = 1 \times (3/2) \times 2 \times 3 = 9t$

· 연직분력 : P_V

$P_V = w_0 \times b \times (\square CBDO - \triangledown AOB - \triangledown AOD)$

$= 1 \times 2(6 \times 3 - \frac{30}{360} \times 3.14 \times 6 \times 6 - \frac{6 \times 1/2 \times 3}{2})$

$= 2(18 - 3 \times 3.14 - 4.5\sqrt{3})$

$P = \sqrt{P_H^2 + P_V^2} = \sqrt{9^2 + 1.57^2} = 1.57t$

② 작용점까지의 거리 : h_C

$h_C = 2/3 \times 3 = 2m$

③ 작용방향 : Θ

$\tan\Theta = \frac{P_V}{P_H}$

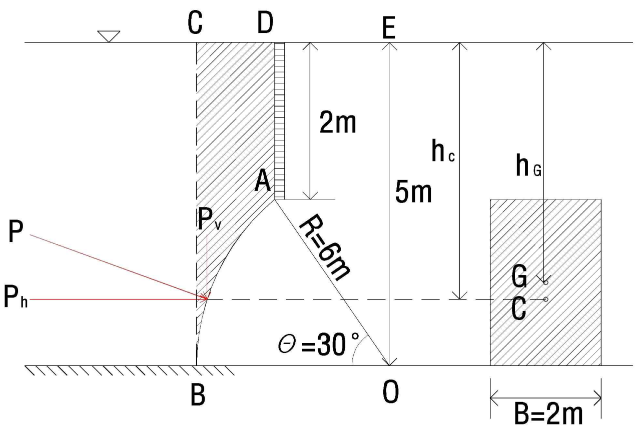
$\Theta = \tan^{-1}(\frac{1.57}{9})$

$= \tan^{-1}0.1744$

$= 9°53'43''$

$= 9.8°$

<예제2.14> 폭 2m인 tainter gate의 곡면에 작용하는 전수압과 작용점의 위치를 구하라.



① 전수압 : P

· 수평분력 : P_H

$P_H = w_0 h_G A = 1 \times 3.5 \times 2 \times 3 = 21t$

· 연직분력 : P_V

$P_V = w_0 \times b \times (\square CBOE - \triangle ABO - \square DAOE)$

$= 1 \times 2(6 \times 5 - \frac{30}{360} \times 3.14 \times 6^2 - \frac{3\sqrt{3}\times(5+2)}{2})$

$= 3.56t$

$P = \sqrt{P_H^2 + P_V^2} = \sqrt{21^2 + 3.56^2} = 20.7t$

② 작용점까지의 거리 : $h_C = h_G + \frac{I_0}{H_G A}$

$$h_C = 3.5 + \frac{\frac{2\times3^3}{12}}{3.5\times2\times3} = 4.4m$$

③ 작용방향 : Θ‘

$\tan\Theta' = \frac{P_V}{P_H}$

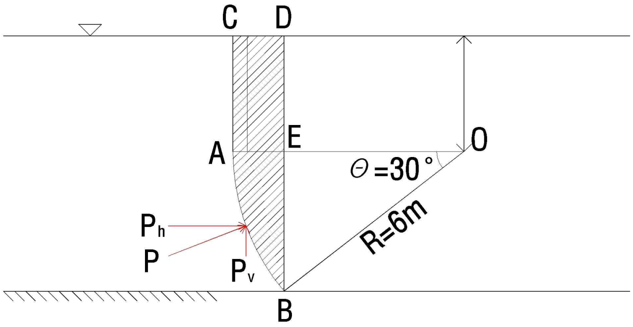
$\Theta' = \tan^{-1}(\frac{3.56}{21})$

$= \tan^{-1}0.16952$

$= 9°37' 17''$

$= 9.4°$

<예제 2.15> 폭이 2m인 수문의 전수압과 작용점의 위치를 계산하라.



① 전수압

수평분력 : $P_H = w_0 h_G A$

$= 1 \times 3.5 \times 2 \times 3$

$= 21t$

연직분력 : $P_V = w_0 b\{(\triangledown ABO - \triangle EBO) + \square CAED\}$

$$= 1 \times 2 \left[\left(\frac{30}{360} \times 3.14 \times 6^2 \right) - \left(\frac{3\sqrt{3} \times 3}{2} \right) + (6 - 3\sqrt{3}) \times 2 \right]$$

$$= 2 \left[(3 \times 3.14) - 4.5\sqrt{3} + 12 - 6\sqrt{3} \right]$$

$= 6.47t$

$\therefore P = \sqrt{P_H^2 + P_V^2}$

$= \sqrt{21^2 + 6.47^2}$

$= 21.9t$

② 작용점까지의 거리 : h_c

$$h_c = h_G + \frac{I_0}{h_G A} = 3.5 + \frac{\frac{2 \times 3^3}{12}}{3.5 \times 2 \times 3}$$

$$= 3.5 + \frac{2 \times 3 \times 3 \times 3}{3.5 \times 2 \times 3 \times 12} = 3.5 + \frac{3}{14}$$

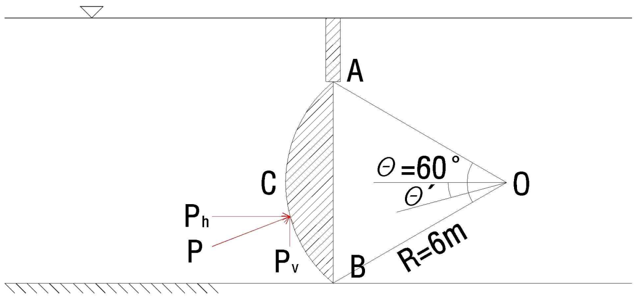
$= 3.7m$

③ 작용방향 Θ'

$\tan\Theta' = P_V / P_H$

$\Theta' = \tan^{-1}(P_V/P_H) = \tan^{-1}(6.47/21) = \tan^{-1}0.3080 = 17°07'08''$

<예제 2.16> 폭이 2m인 수문의 전수압과 작용점의 위치를 계산하라.



① 전수압

수평분력 : $P_H = w_0 h_G A$

$= 1\times5\times2\times6$

$= 60t$

연직분력 : $P_V = w_0 b(\triangledown ACBO - \triangle ABO)$

$$= 1\times2\left(\frac{60}{360}\times3.14\times6^2 - \frac{6\sqrt{3}\times2}{2}\right)$$

$$= 2\left(\frac{1}{6}\times3.14\times6^2 - 9\sqrt{3}\right)$$

$= 6.5t$

$\therefore P = \sqrt{P_H^2 + P_V^2}$

$= \sqrt{60^2 + 6.5^2}$

$= 60.35t$

② 작용점까지의 거리 : h_c

$$h_c = h_G + \frac{I_0}{h_G A} = 5 + \frac{\frac{2\times6^3}{12}}{5\times2\times6}$$

$$= 5 + \frac{2\times6\times6\times6}{5\times2\times6\times12} = 5 + \frac{3}{5}$$

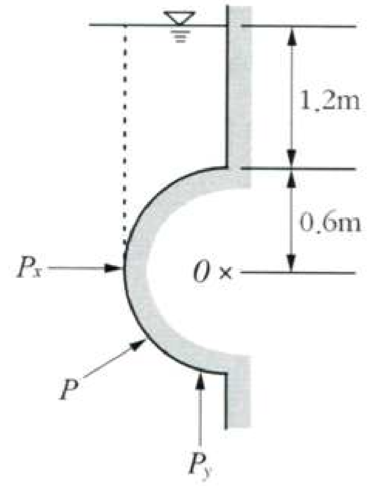
$= 5.6m$

③ 작용방향 Θ'

$\tan\Theta' = P_V / P_H$

$\Theta' = \tan^{-1}(P_V/P_H) = \tan^{-1}(6.5/60) = \tan^{-1}0.1083 = 6°10'58''$

<예제 2.17> 그림과 같은 직경 1.2m의 반구체(shell)가 수중의 수직벽에 부착되어 있다. 이 구체의 중심이 수면하 1.8m에 있을 때 연직성분, 수평성분의 전수압과 작용점의 위치를 구하라.



(풀이) $P_x = wh_G A = 1{,}000 \times 1.8 \times (\pi \times 1.2^2)/4 = 2{,}036kg$

$$P_y = w\overline{V} = w(\frac{1}{2} \times \frac{4}{3}\pi r^3)$$
$$= 1{,}000 \times (\frac{1}{2} \times \frac{4}{3} \times 3.14 \times 0.6^3) = 452kg$$

$$h_C = h_G + \frac{I_G}{h_G A}$$
$$= 1.8 + \frac{(\pi \times 1.2^4)/4}{1.8 \times (\pi \times 0.6^2)} = 1.85m$$

$$\sum M_0 = P_x \bullet (h_C - 1.8) - P_y \bullet x = 0$$

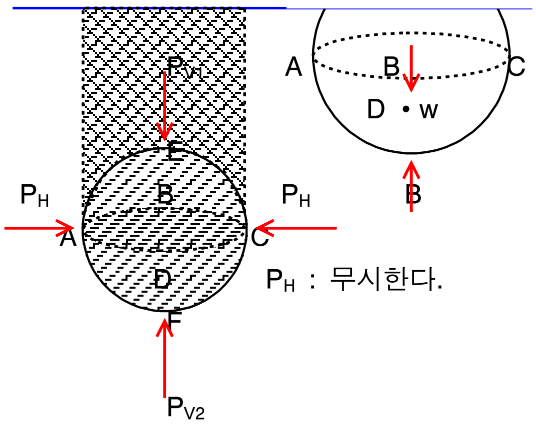
$$2{,}0367(1.85 - 1.8) - 452x = 0$$

$$x = 0.23m$$

$\therefore$ 수면에서 $1.85m$, 벽면에서 $0.23m$에 수압이 작용

2.8 부력과 부체의 안정

A. 부력(Buoyant force or Buoyancy) : B



P_H : 무시한다.

물 속에 잠겨있는 구(球)를 생각하면 수평분력(P_H)는 서로 같으므로 평형을 유지하고 연직분력(P_V)만이 작용한다.

P_{V2} : w × (곡면 AFC를 밑면으로 하는 연직수주의 체적)

P_{V1} : w × (곡면 AEC를 밑면으로 하는 연직수주의 체적)

이때 연직분력의 합력을 B라 하고 구의 체적을 V라 하면

$B = P_{V2} - P_{V1}$

$= wV$

부력 B= wV : 아르키메데스 부력 원리

구가 연직방향으로 힘이 평형하므로 다음식이 성립한다.

부체평형방정식 : ⑦ - B = W

<예제 2.18> 빙산이 해상에 떠 있는데 수면상의 빙산의 체적이 $1000m^3$이면 빙산의 전체 체적은 얼마인가? 단, 빙산의 비중은 0.92,해수의 비중은 1.03이다.

(풀이) 빙산의 체적을 V라 하면 배제된 해수의 체적은 (V-1000)이다.

$$B = W$$

$$B = 1.03(V-1000)$$

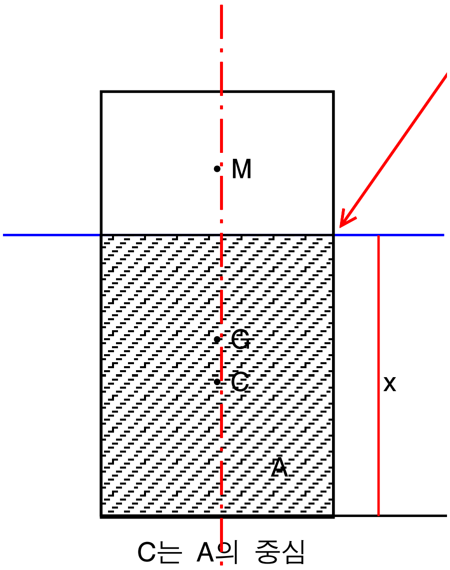
$$W = 0.92V$$

$$0.92V = 1.03(V-1000)$$

$$(1.03-0.92)V = 1.03 \times 1000$$

$$V = \frac{1.03 \times 1000}{1.03-0.92} = 9363m^3$$

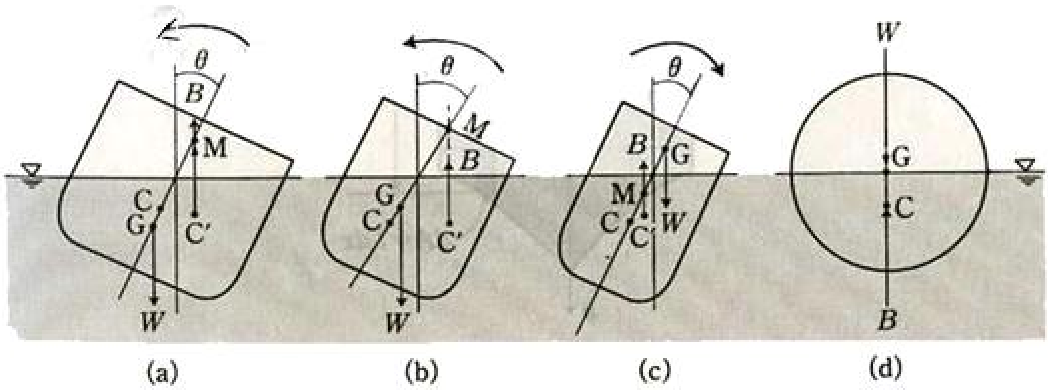
B. 부체의 안정



C는 A의 중심

- 부양면(plan of floatation)
  수면이 물체를 가르는 가상단면
- 부심(浮心 : Center of buoyanay) : C
  물 속의 물체의 중심으로 부력의 작용점.
- 흘수(吃水 : draft) : x
  수면에서 물체의 최심부까지의 거리
- 경심(傾心 : Metacenter) : M
  변위된 부심 C'에서의 연직선과 중심선이 만나는 점
- 경심고(傾心高 : Metacenter height) : h_n
  중심에서 경심까지의 거리

부체의 안정성 : 경심(M)이 무게중심(G)보다 상위할 경우, 복원 모멘트가 작용할 경우(b)



부체 안정 판별식 :

⑧ $\overline{MG} = \frac{I_{\min}}{V} - \overline{CG}$

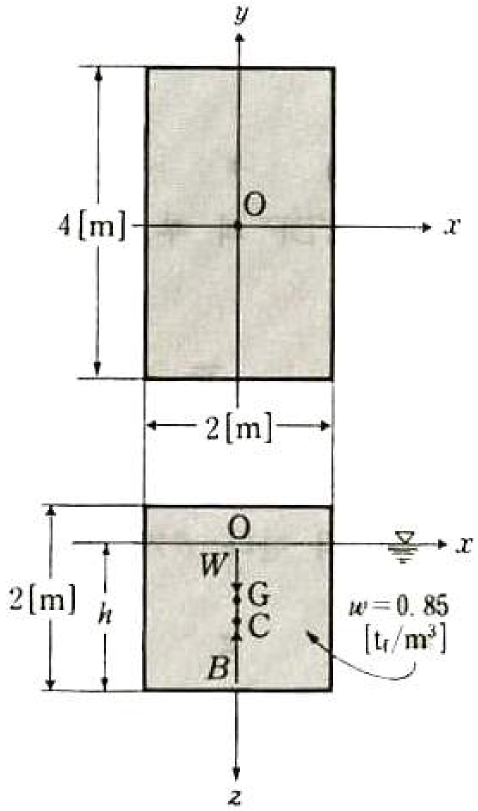
일반적으로 부체의 평형 조건식은 다음과 같다.

$h_n = \frac{I_x}{V} - a$ 여기서 $\overline{MG} = h_n$, $\overline{CG} = a$

$h_n > 0$: 안정

h_n <0 : 불안정
h_n =0 : 중립

<예제 2.19> 그림과 같은 사각형 단면을 갖는 기둥을 물에 띄웠을 때 부체의 안정을 판별하라. 단, 물체의 단위중량은 w=0.85t/m^3이다.



(풀이) (1) 흘수(h)

물체의 무게 $W = (2\times2\times4)\times0.85$
$= 13.6\,t/m^3$

물의 단위중량 $w_o = 1\,t/m^3$

부력 $B = w_o(2\times4\times h) = 8w_0h$

$B = W$

$13.6 = 8\times1h \qquad \therefore h = 1.7m$

(2) 부체의 안정

$$\overline{OC} = \frac{h}{2} = \frac{1.7}{2} = 0.85m$$

$$\overline{OG} = h - \frac{2}{2} = 1.7 - 1 = 0.7m$$

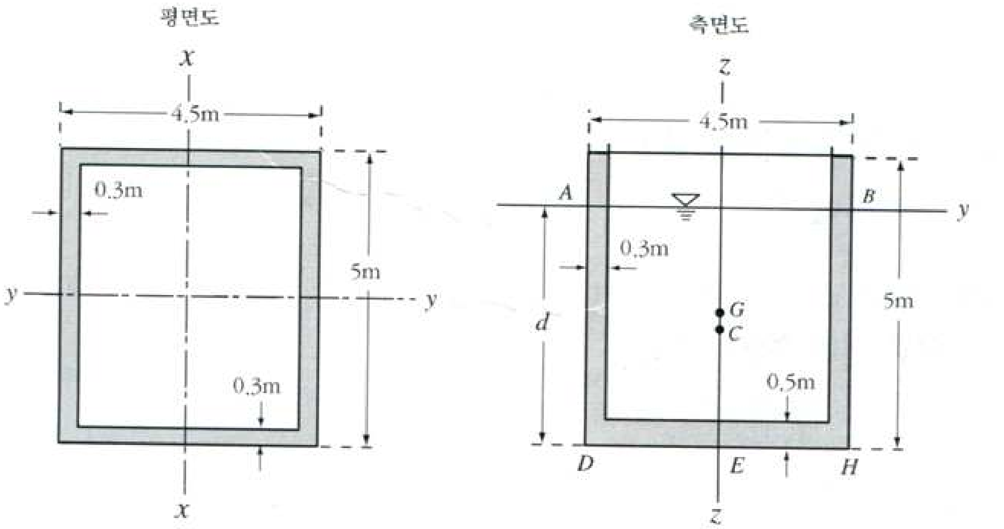
$$a = \overline{GC} = 0.85 - 0.7 = 0.15$$

$$I_{\min} = I_y = \frac{bh^3}{12} = \frac{4 \times 2^3}{12} = 2.667m^4$$

배수용적 $\overline{V} = 2 \times 4 \times 1.7 = 18.6m^3$

$$\therefore h_n = \frac{I_{\min}}{\overline{V}} - a = \frac{2.667}{13.6} - 0.15 = 0.046 > 0$$

<예제 2.20> 그림과 같은 콘크리트 케이슨(caisson)을 해면에 띄웠을 때 그 안정을 판정하라. 단, 철근콘크리트 비중은 2.4이다.



(풀이) 1) 케이슨 중량 계산

	케이슨 부분	콘크리트 체적(m^3)
바닥 상판	4.5x5.0x0.5	11.25
x방향 양 측벽	2x4.5x(5.0-0.5)x0.3	12.15
y방향 양 측벽	2x((5.0-0.6)x(5.0-0.5)x0.3	11.88
합계		35.28

$$W = 2,400 \times 35.28 = 84,672kg$$

2) 흘수 d와 부심의 위치

부력 $B = w\overline{V}$

$B = 1{,}025 \times (4.5 \times 5.0 \times d) = 23{,}062d$

$W = B$이므로

$84{,}672 = 23{,}062d$

$\therefore\ d = 3.67m$

따라서 부심 C의 밑면 바닥으로부터 높이는

$$\overline{EC} = \frac{d}{2} = \frac{3.67}{2} = 1.835m$$

3) 무게중심의 위치

무게중심 G는 부심 C와 동일 직선 상에 있고 그 밑면으로부터 높이 $\overline{EG}$는

$$\sum_1^N V_i \times \overline{EG} = \sum_1^N (V_i \times \overline{EC_i})$$

$$\overline{EG} = \frac{\sum_1^N (V_i \times \overline{EC_i})}{\sum_1^N V_i} = \frac{\sum M}{\sum V}$$

	체적 $V_i(m^3)$	밑면에서 중심 높이 $\overline{EC_i}\ (m)$	체적모멘트(m^4)
바닥 상판	11.25	0.25	2.8125
x방향 양 측벽	12.15	$(0.5 + \frac{5.0 - 0.5}{2})$	34.4125
y방향 양 측벽	11.88	$(0.5 + \frac{5.0 - 0.5}{2})$	32.6600
합계$(\sum)$	35.28		68.8850

$$\therefore\ \overline{EG} = \frac{68.885}{35.28} = 1.95m$$

4) 부체의 안정 판정

부양면의 장축에 관한 단면 2차 모멘트 I_x는

$$I_x = \frac{bh^3}{12} = \frac{5.0 \times 4.5^3}{12} = 37.969m^4$$

$$a = \overline{CG} = \overline{EG} - \overline{EC}$$

$$= 1.950 - 1.835 = 0.115m$$

수중의 케이슨의 체적 $\overline{V}$는

$$B = w\overline{V}$$

$$\overline{V} = \frac{B}{w} = \frac{84.672}{1.025} = 82.607m^3$$

부체의 안정 판별식 : $h_n = \frac{I_x}{\overline{V}} - a$

$$h_n = \frac{37.969}{82.607} - 0.115 = 0.46 - 0.115 = 0.345 > 0$$

∴ 안정

2.9 상대정지

물이 담겨진 용기가 일정한 등가속도를 받으면 물은 용기와 함께 등가속도 운동을 한다. 물분자 상호간에 상대적인 운동이 없어 마찰응력은 작용되지 않는다. 따라서 물에 작용하는 힘은 압력뿐이며 물은 용기에 대하여 **상대적 평형**(relative equilibrium)을 이루게 되므로 정수 역학의 기본 원리를 그대로 적용할 수 있게 된다.

즉 Newton의 운동 2법칙 : $F = m\alpha = m\frac{dv}{dt}$

여기서 F는 작용 힘이고 $m\frac{dv}{dt}$는 관성력이라 하며 이것을 이항시키면

$$F - m\frac{dv}{dt} = 0, \quad \sum F = 0 \text{ (정역학평형식)}$$

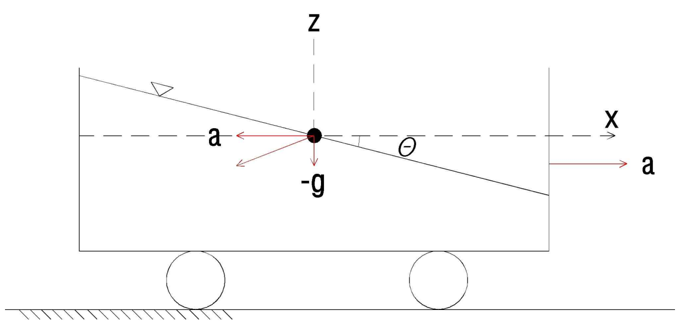
이 식은 실제로 작용하는 힘 F에 관성력 $(-)m\frac{dv}{dt}$를 가하면 정역학 평형 상태가 됨을 의미한다. 이 것을 **D'Alembert(달랑베르)의 원리**라한다.

dp = ρ(Xdx + Ydy + Zdz) (정역학의 평형방정식)

그런데 압력변화가 없는 면(등압면)에서는 dp = 0이므로

Xdx + Ydy + Zdz = 0 (등압면의 평형방정식)

① 수평(등)가속도는 받는 액체



수조 속의 물은 중력 가속도(-g)를 받는 동시에 관성 때문에 x축 방향으로 α와 크기가 같고 방향이 반대인 힘이 작용한다.

등압면의 액체 평형방정식에서

Xdx + Ydy + Zdz = 0

X = -α

Y = 0

Z = -g 이므로

-αdx - gdz = 0

∴dz = - $\frac{\alpha}{g}dx$ ($\frac{dz}{dx} = -\frac{x}{g}$)

적분하면 z = $-\frac{\alpha}{g}\alpha + C$

이때 좌표의 원점을 수면의 중심이라면

x = 0, z = 0 이므로 C = 0

∴ Z = $-\frac{\alpha}{g}x$

* 구면의 기울기는 tanΘ = dz / dx = - α / g

∴Θ = $\tan^{-1}(-\frac{\alpha}{g})$

<예제 2.21> 그림과 같이 용기 속의 수심이 1m일 때 x방향으로 4m/sec^{2}의 수평 가속도로 이동하였다. 용기속의 양단에서의 수심과 경사각 Θ를 구하라.

(풀이) $z = -\frac{\alpha}{g}x$

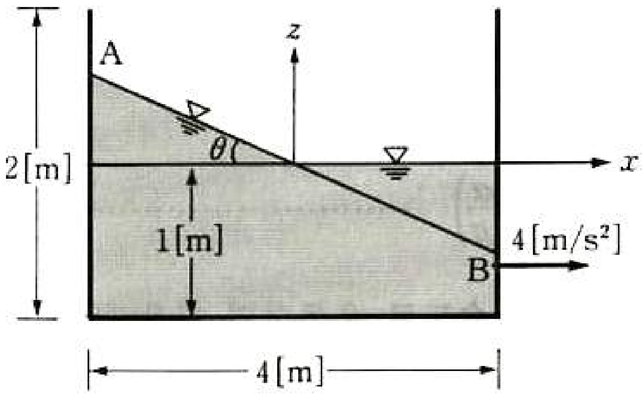
$$= -\frac{4}{9.8}\times(-2) = 0.816m$$

$$\tan\theta = \frac{\alpha}{g} = \frac{4}{9.8} = 0.41$$

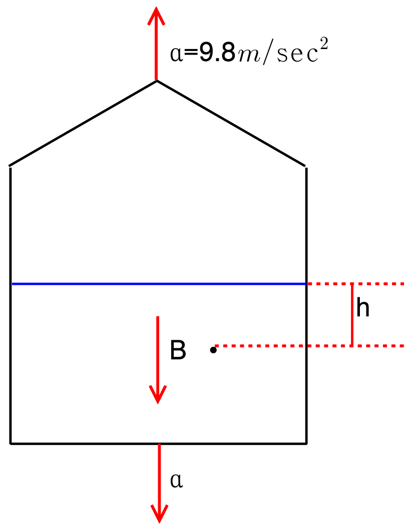
A점의 수심 = 1+ 0.816=1.816m

B점의 수심 = 1- 0.816 =0.184m

경사 각도 $\theta = \tan^{-1}0.41 = 22^\circ 30'$



② 연직 등가속도를 받는 액체



액체의 평형방정식에서

dp = ρ(Xdx + Ydy + Zdz)

x = 0, y = 0, z = -α-g 이므로

∴dp = ρ(Xdx + Ydy + Zdz)

= -ρ · (-α-g) · dz

= -w/g · (α+g) · dz

p = -w/g · (α+g) · z+C(적분 상수)

p_B = wh

w = ρg

ρ = w / g

수면의 중심을 좌표의 원점이라면

C = 0, p = -w/g · (α+g)z

수면에서 h 깊이의 B점의 압력을 p_B라 하면

z = -h

p_B = -w/g · (α+g) · (-h)

= (wh)/g · (α+g)

∴ $p_B = wh(1+\frac{\alpha}{g})$

하향으로 했다면

$P_B = wh(1- \frac{\alpha}{g})$

<예제 2.22> 위 그림에서 수조를 상하로 중력가속도 $9.8m/\sec^2$로 움직일 때 수심 1m 깊이의 B점에 작용하는 수압을 구하라.

① 상향으로 작용할 때

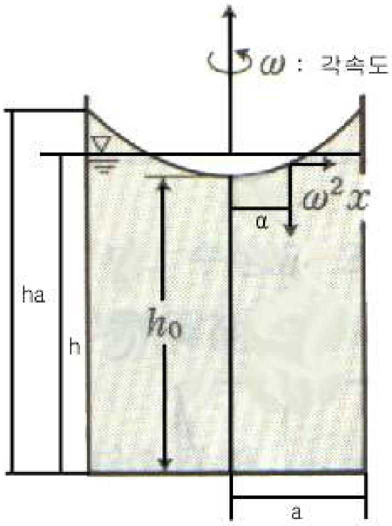
$P_B = wh(1+\alpha/g) = 1 \times 1(1 + 9.8 / 9.8) = 2t/m^2$

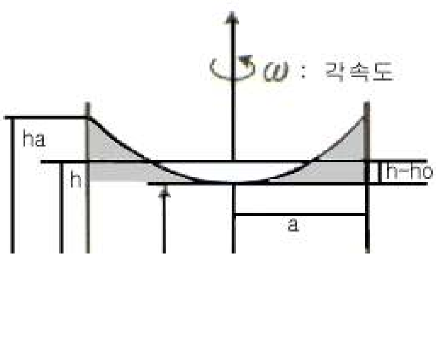
② 하향으로 작용할 때

$P_B = wh(1-\alpha/g) = 1 \times 1(1 - 9.8 / 9.8) = 0$

③ 회전 등가속도를 받을 때

원통을 각속도 ω로 회전시키면 통속의 물은 점성 때문에 통과 같은 속도로 회전한다. 연직축의 둘레의 물은 중력가속도와 원심력을 받아 곡면을 만든다. 그래서 중심축에서 x지점의 물을 생각하면 접선속도가 $x\omega$이므로 원심력속도는 $((x\omega)^2 / x) = x\omega^2$





액체의 등압면 평형방정식에서

$Xdx + Ydy + Zdz = 0$

$X = x\omega^2$, $Y = 0$, $Z = -g$ 이므로

$x\omega^2 \cdot dx - g \cdot dz = 0$

$\therefore$ $dz = (\omega^2/g) \cdot xdx$를 적분하면

$Z = (\omega^2/g) \cdot (x^2/2) + C = (\omega^2/2g) \cdot x^2 + C$

그런데 그림에서

$x = 0$일 때 $Z = h_0$ 이므로

$C = h_o$

$Z = (\omega^2/2g)x^2 + h_0$

또 $x = a$일 때 $Z = h_a$이므로

$h_a = (\omega^2/2g)a^2 + h_0$ --- ①

그림에서 빗금 친 부분의 체적은

$\pi a^2(h-ho) = 1/2\pi a^2(ha-ho)$

$h-h_0 = 1/2ha - 1/2ho$

$1/2ha = h - ho + 1/2ho$

$= h - 1/2ho$

$\therefore$ $ha = 2h - ho$을 ①식에 대입하면

$2h - ho = (\omega^2/2g)a^2 + ho$

$\therefore$ $2ho = 2h - (\omega^2 a^2/2g)$

$\therefore$ $ho = h - \omega^2 a^2/4g$

그런데 위식을 $ha = 2h - ho$에 대입하면

$ha = 2h - (h - \omega^2 a^2/4g)$

$\therefore$ $ha = h + \omega^2 a^2/4g$

$$h_a - h_0 = \frac{\omega^2 a^2}{2g}$$

<예제 2.23> 그림과 같이 안지름 50cm, 높이 100cm의 원통 용기에 물이 있다. 이 용기의 중심축을 매분 80회 회전하였을 때 중심축의 수심 h_0를 구하라.

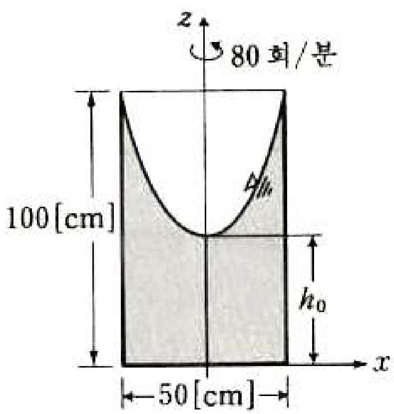
(풀이) 회전수 n과 각속도 ω의 관계는

$2\pi : 1 = \omega : n \quad \omega = 2\pi n$

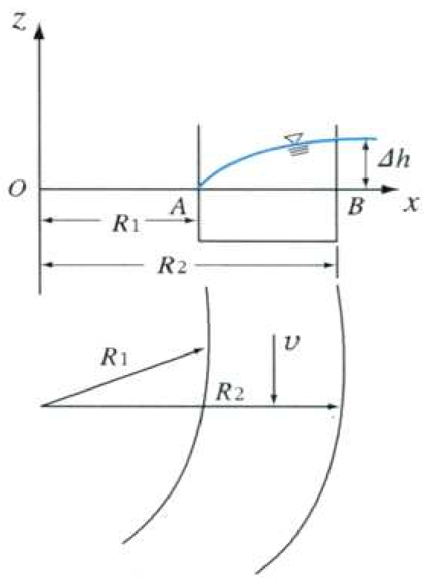
$$\omega = \frac{2 \times 3.14 \times 80}{60} = 8.373 \ 1/s$$

$x = a = 25cm, z = h_a = 100cm$

$$h_0 = h_a - \frac{\omega^2}{2g}a^2 = 100 - \frac{8.373^2}{2 \times 980} \times 25^2 = 77.644cm$$



<예제 2.24> 그림과 같이 원형 만곡수로 물의 평균속도가 v=3m/sec, 수로의 내측 반경 $R_1 = 10m$, 외측의 반경 $R_2 = 20m$이다. 이 때 외측의 임의의 점의 수압 p와 수위차 Δh을 구하라.



(풀이) 동수역학 평형방정식

$$dp = \rho(Xdx + Zdz)$$

$$X = \frac{v^2}{x}$$: 구심가속도 $\alpha_r = \frac{V^2}{r}$, $Z = -g$

$$dp = \rho(\frac{v^2}{x}dx - gdz)$$

적분하면

$$\int dp = \int \rho(\frac{v^2}{x})dx - \int \rho g dz$$

$$p = \rho v^2 \log x - \rho g z + C$$

$x = R_1, z = 0$일 때, $p = 0$이 되므로

$$C = -\rho v^2 \log R_1$$

임의 점 (x, z)의 수압 $p = \rho(v^2 \log \frac{x}{R_1} - gz)$

B점의 수위상승고 Δh는 $x = R_2$, $z = \Delta h$ 때 $p = 0$를 대입하면

$$\Delta h = \frac{v^2}{g} \log \frac{R_2}{R_1}$$

$$= \frac{3^2}{9.8} \log \frac{20}{10} = 0.918 \times 0.301 = 0.276m$$

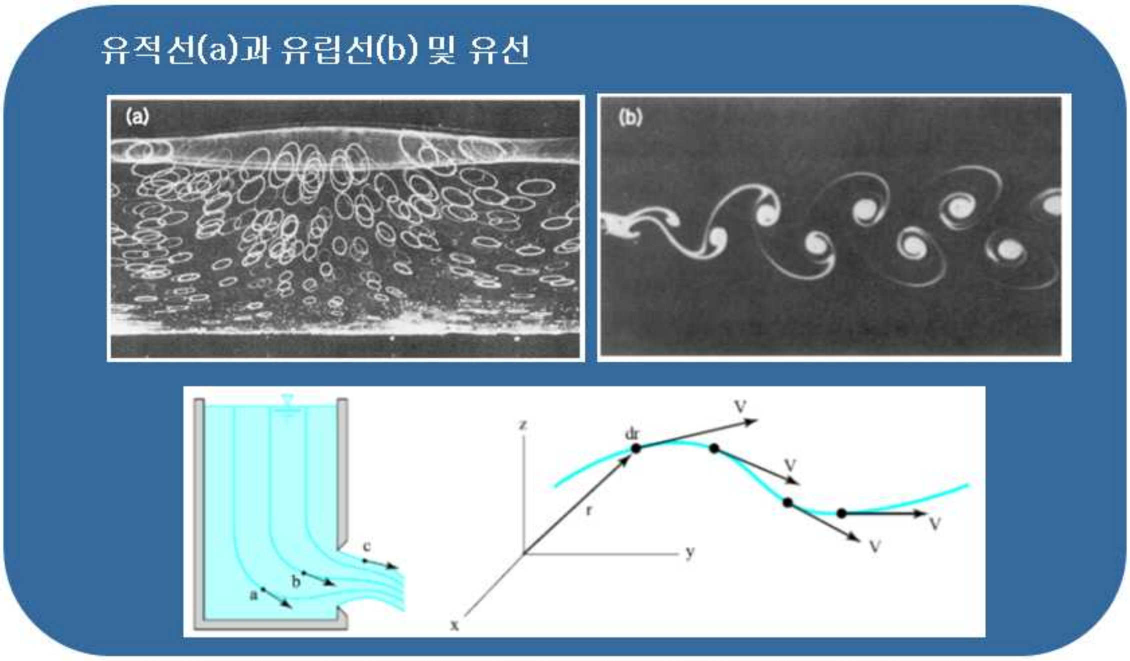
3장 동수역학

3.1 유동의 분류와 정의

물이 관로 속이나 하천 등을 흐를 때 운동하는 물의 상태를 **흐름(flow)** 이라 하며, 유체 흐름의 속도를 **유속(velocity),** 하천이나 관로 속에서 하나의 횡단면적인 **유적(area)**을 통과하는 수량을 **유량(discharge)** 이라고 한다. 유속은 단면의 위치에 따라 다르나 일반적으로 단면에 대한 평균값을 사용하는데 이것을 **평균유속(mean velocity)** 라 하며, 보통 유속이라 하면 이 평균유속을 의미한다. 일반적으로 실제유속은 v 로 평균유속은 V로 표시한다. 유수 단면적 즉 유적을 A, 유량을 Q라 하면 그 관계는 다음식과 같다.

$$\vec{V} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k} \qquad [LT^{-1}],\ m/sec$$

$$Q = VA \qquad [L^3T^{-1}],\quad m^3/sec$$



<예제 3.1> 지름 D가 1000 mm인 송수관속의 유량이 2.355 m^3/sec일 때 평균유속을 구하라.

(풀이) $A = \dfrac{\pi D^2}{4} = \dfrac{3.14 \times 1^2}{4} = 0.785\,m^2$

$$V = \frac{Q}{A} = \frac{2.355}{0.785} = 3\,m/\sec$$

유선의 방정식

공간좌표상에서 유선상의 한 점(x, y, z)에서 속도벡터 V의 세 직각방향 성분을 u, v, w라 하고, 방향여현을 l, m, n이라 하면

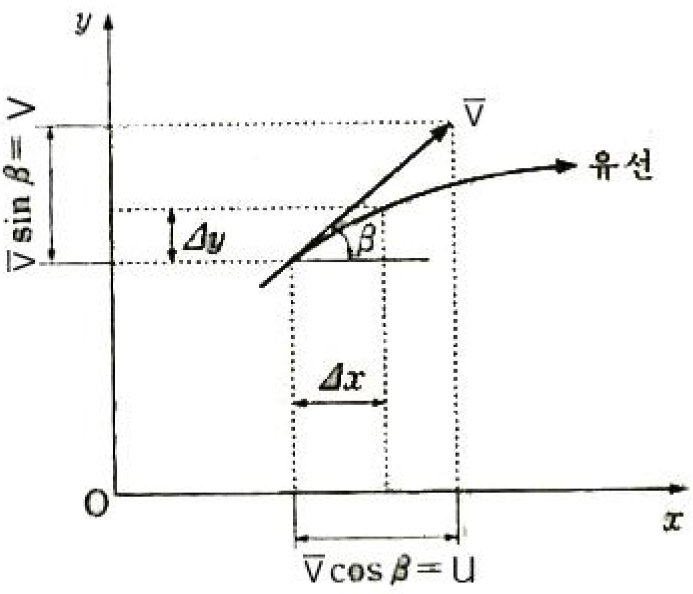
$l = \cos\alpha$, $m = \cos\beta$ $n = \cos\gamma$이므로

$$u = \overline{V}\,l, \quad v = \overline{V}m, \quad w = \overline{V}n$$

유선상의 미소 움직인 거리 ds의 세 직각방향 성분을 dx, dy, dz라 하면

$$dx = l\,ds, \quad dy = m\,ds, \quad dz = n\,ds$$

$$\therefore \frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w}$$



2차원 평면에서 유선의 식은 다음과 같이 유도한다.

$$\tan\beta = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$$

$$\tan\beta = \frac{\overline{V}\sin\beta}{\overline{V}\cos\beta} = \frac{v}{u}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v}{u} \qquad v\,dx = u\,dy$$

$$\therefore \frac{dx}{u} = \frac{dy}{v}$$

<예제 3.2> 속도성분이 다음식과 같을 때 유선은 어떤 형태를 갖는가?

$$u = \frac{1}{x},\ v = \frac{-1}{y},\ w = 0$$

(풀이) $\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w}$

$$xdx = -ydy$$

$$\int xdx = \int -ydy$$

$$\frac{x^2}{2} + c_1 = -\frac{y^2}{2} + c_2$$

$$x^2 + y^2 = 2(c_2 - c_1)$$

$$r^2 = 2(c_2 - c_1)$$

$$x^2 + y^2 = r^2$$

3.2 흐름의 분류

정상류와 부정류

- 정상류(steady flow) : 흐름특성(속도, 압력, 밀도 등)이 시간에 따라 변함
- 부정류(unsteady flow) : 흐름특성이 시간에 따라 변하지 않음

정상류 : $\frac{\partial \overline{V}}{\partial t} = 0$, 부정류 : $\frac{\partial \overline{V}}{\partial t} \neq 0$

층류와 난류

점성유체의 흐름은 층류(laminar flow)와 난류(turbulent flow)로 구분

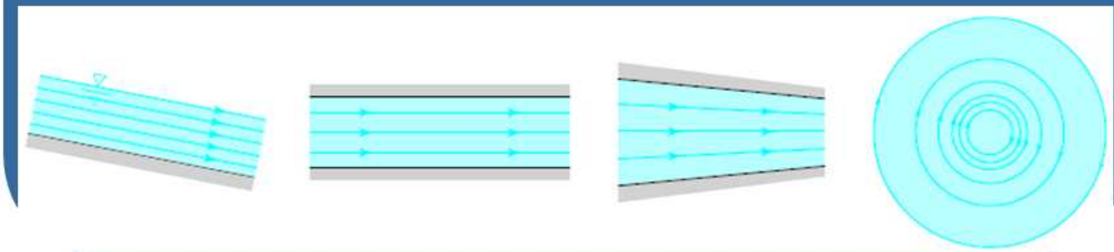
층류인 경우 흐름 형태가 판 또는 층 형태의 매끈한 운동으로 나타나고,

난류의 흐름 형태는 평균적인 운동 주위로 차원의 불규칙한 운동이 발생

등류와 부등류

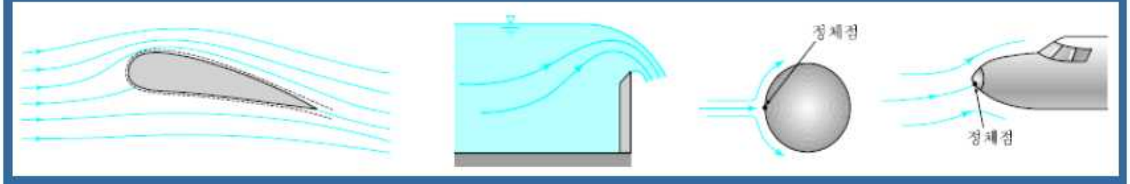
- 등류(uniform flow) : 흐름공간에서 유선을 따르는 임의의 지점들에서 속도가 변하지 않음
- 부등류(nonuniform flow) : 흐름공간에서 유선을 따르는 임의의 지점들에서 속도가 변함

등류 : $\frac{\partial \overline{V}}{\partial s} = 0$, 부등류 : $\frac{\partial \overline{V}}{\partial s} \neq 0$



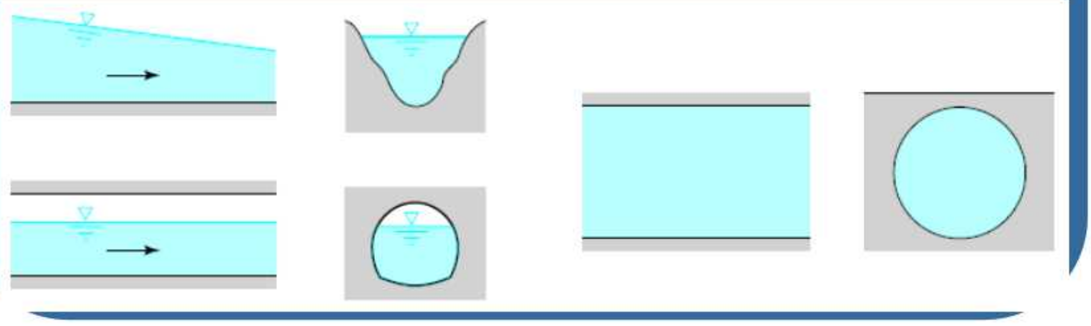
1차원, 2차원 및 3차원 흐름

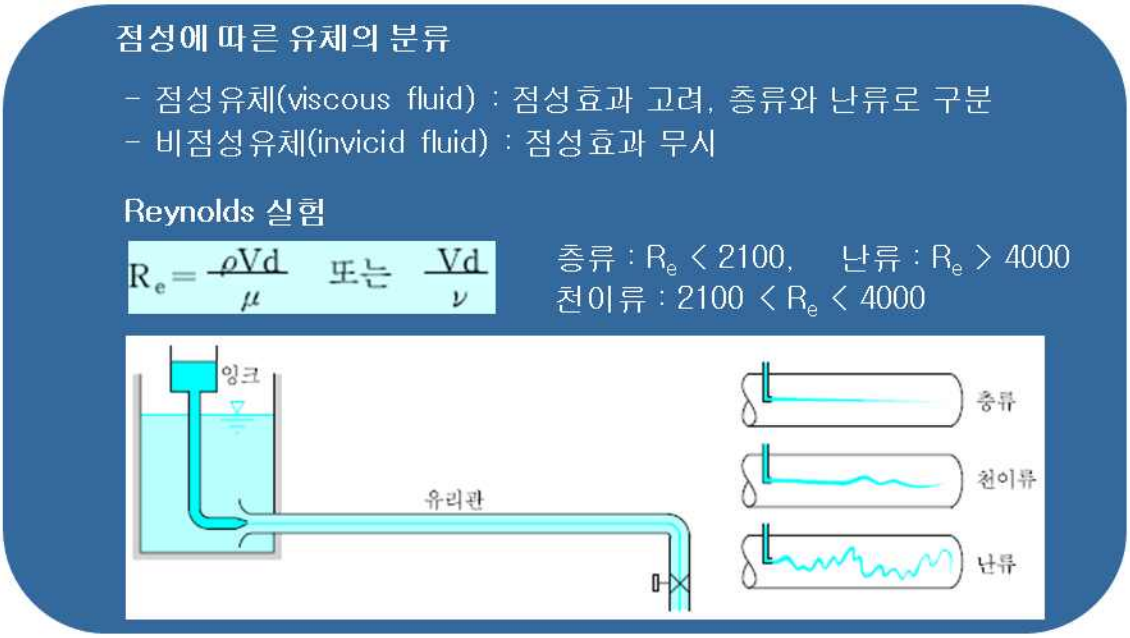
유체의 흐름은 공간좌표상에서 x, y, z의 방향으로 이루어지고, 또한 시간에 따라 변하게 된다. 하지만 대부분의 경우 문제를 쉽게 이해하고 해석하기 위해 단순화 한다.



관수로와 개수로흐름

- 관수로흐름(pipe flow) : 폐합 관거 내에 자유 수면이 없이 물이 가득 차서 압력차에 의해 흐르는 흐름
- 개수로흐름(open channel flow) : 대기와 접하며 자유수표면을 형성하여 중력차에 의해 흐르는 흐름





<Reynolds의 실험>

실제 유체가 가지는 점성은 유체층간이나 유체입자와 경계면 사이의 마찰력(전단력)을 일으켜 유체의 흐름에 저항을 가져온다.

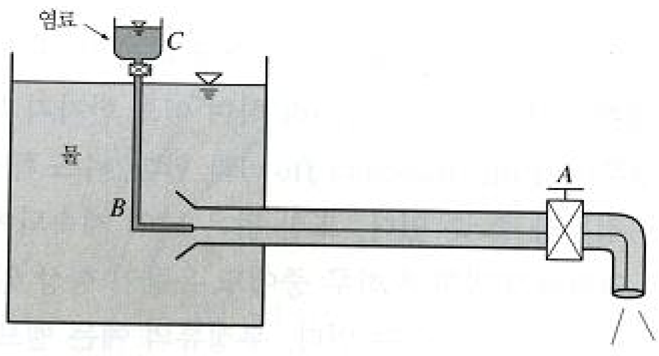


그림 3-4

[그림 1]

◦ 층류(laminer flow)
유체입자가 서로 층을 이루면서 점성운동만 하게 된다. 즉 층과 층 사이의 분자에 의

한 유출량의 변화만 있다.

◦ 난류(turbulent flow)

유체입자가 심한 불규칙 운동을 하면서 흐르는 흐름

◦ 상한계 유속(uppercritical velocity)

층류의 흐름에서 유속을 점차 가속시켜 vortex(맴돌이)가 일어나 난류상태가 된다.

◦ 하한계 유속(lowercritical velocity)

난류상태의 흐름에서 유속을 점차 감소시켜 층류상태로 될 때의 유속

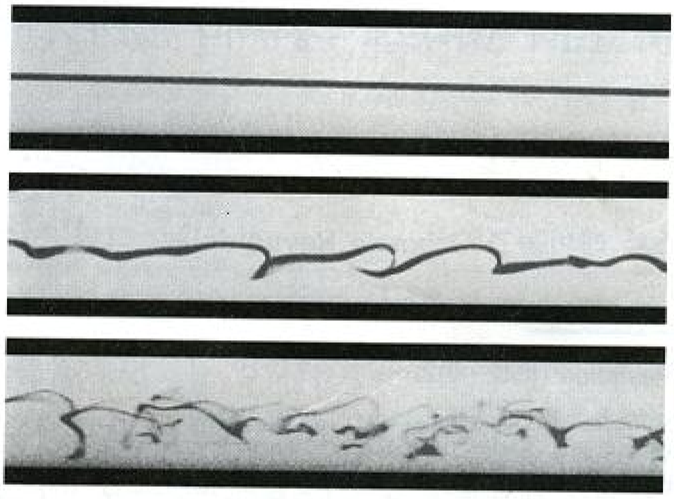


그림 3-5 흐름의 발달과정. 위로부터 층류, 천이영역 그리고 난류

[천이영역(transition region)]

층류에서 난류로의 변위는 순간적으로 일어나는 것이 아니라 층류와 난류가 공존하는 흐름상태가 공존하는 지역.

[손실수두:h_L]

유체의 흐름에서 에너지를 감소시키는 수두

Reynolds의 실험에 의하면 손실수두와 유속 v 사이에 $h = kv^n$인 식을 얻었다.

양변에 log를 취하면

log h = log kv이다.

그래프로 나타내면

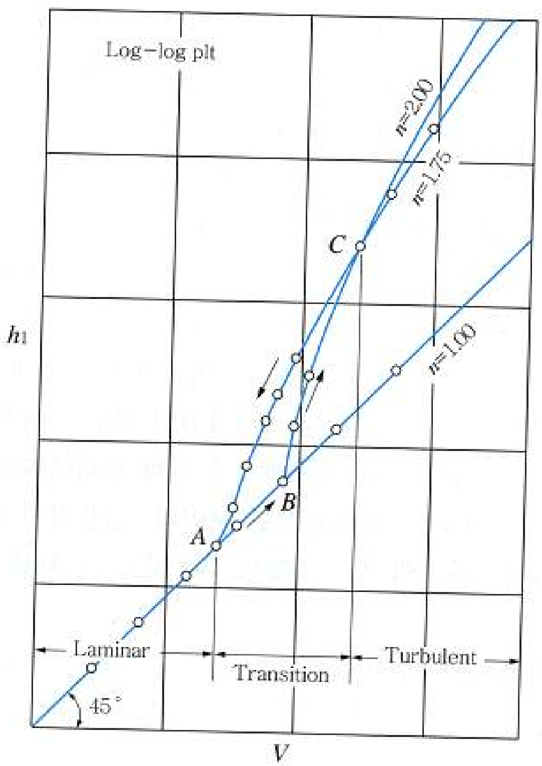


그림 4-1 유속과 마찰손실수두

그림에서

Reylods Number(레이놀드 수) : Re

⑮ - $R_e = \frac{v \cdot D}{\upsilon} = 2,000$

$\upsilon = \frac{\mu}{\rho} = \frac{\rho v D}{\mu}$ (동점성계수)

μ : 점성계수

Re < 2000 : 층류

2000 < Re < 4000 : 한계류

Re > 4000 : 난류

<예제 3.3> 직경 2cm인 원관에 물이 흐르고 있다. 유속이 7.96cm/sec 일 때 Reynolds수를 구하고 이 흐름이 층류인지 난류인지 판별하라. 단, 동점정계수는 0.01cm^2/sec이다.

(풀이) $R_e = \frac{VD}{\upsilon} = \frac{7.96 \times 2}{0.01} = 1,592$

$\therefore R_e < 2,000$

3.3 연속방정식

1) 유체 가속도

가속도

- 1차원흐름의 가속도 : 유선상의 가속도

$$a_s = \frac{dV}{dt} = \frac{dV}{ds}\frac{ds}{dt} = V\frac{dV}{ds} \qquad a_n = \frac{V^2}{R}$$

- 3차원 흐름의 가속도 : 공간상의 가속도

x방향 $a_x = \frac{du}{dt}$ $\quad du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz + \frac{\partial u}{\partial t}dt$

$$a_x = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{dz}{dt} + \frac{\partial u}{\partial t}$$

$$a_x = u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial t}$$

y방향 $a_y = u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial t}$

z방향 $a_z = u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial t}$

$V = V(s,t)$

전미분하면

$$dV = \frac{\partial V}{\partial s}ds + \frac{\partial V}{\partial t}dt$$

가속도 α는

$$\alpha = \frac{dV}{dt} = V\frac{\partial V}{\partial s} + \frac{\partial V}{\partial t}$$

여기서, $\frac{\partial V}{\partial s}$는 **이류가속도,** $\frac{\partial V}{\partial t}$는 **국부가속도**한다.

2) 검사체적 및 계

연속체인 유체의 운동을 기술하는 데는 일반적으로 두 가지의 방법이 사용될 수 있다. 이들은 라그란지기술방법(Lagrangian)고 오일러기술방법(Eulerian)이다. 라그란지언 법은 특정한 유체입자의 운동에 관심을 갖고 시간에 따른 위치 변화를 기술하는 방법으로 다음식으로 나타낼수 있다.

r = r(p, t)

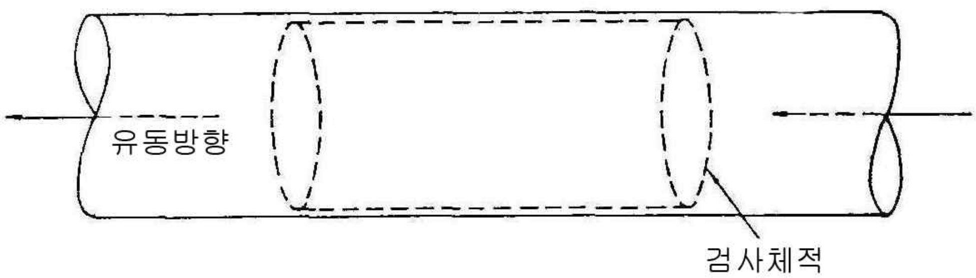
오일러법은 특정 입자의 운동을 기술하는 것이 아니고 , 공간내 특정한 위치를 지나는 임의의 유체입자를 기술한다. 이를 식으로 표시하면 다음과 같다.

$$r_0 = r_0(r,t)$$

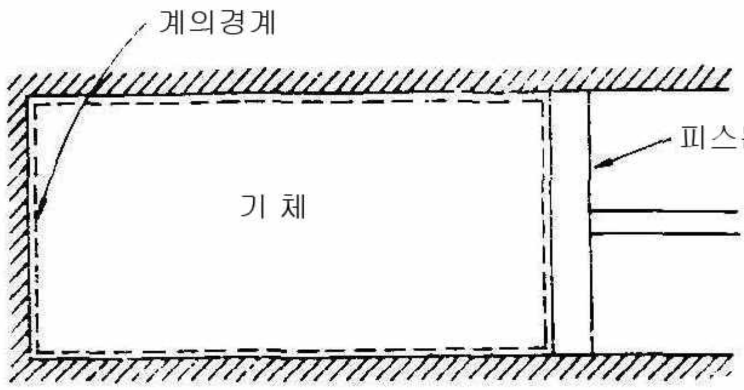
물체의 운동를 기술할 때 어떠한 영역을 설정할 필요가 있다. 오일러 방법에서 설정하는 영역을 검사체적(control volume, C.V)이라 하고, 라그란지 방법에서 설정하는 영역을 계

(system)라고 한다.

검사체적이란 어떤 공간에 고정된 가상의 체적이고 그 경계를 통하여 질량, 운동량, 에너지등이 출입할 수 있다. 그 경계면을 검사표면(control surface, C.S)이라 하며, 검사체적과 검사표면은 시간에 따라서 형상과 위치가 변하지 않는다.



계(system) 특정한 물체들 혹은 유체 입자들만을 포함하는 영역이다. 계내의 질량은 시간에 관계없이 일정하다. 계의 경계는 움직일수 있으나 , 이를 통한 질량의 유입과 유출은 없다. 아래 그림은 점선내 영역, 즉 실린더내의 기체를 모두 포함한 영역을 계라 할 수 있다. 외부로부터 실린더 내로 열이 공급될 때 , 실린더 내의 공기가 팽창함에 따라 피스톤을 오른쪽으로 움직일 것이며, 이에 따라 경계도 이동한다. 따라서 계는 언제나 특정한 물체들만 포함한다. 그러나 일이나 열은 계의 경계면을 통해 가로질러 전달될 수 있다.



3) 계와 검사체적과의 관계

라그란지적 표현을 갖는 동력학의 물리법칙들을 유체역학에 적용하려면 이들을 오일러적인 표현으로 바꾸어야한다. 이를 위해 우선 이 법칙들에 포함되어 있는 계내의 물질들이 갖는 물리량의 시간에 따른 변화율을 검사체적을 사용하는 오일러적 표현으로 나타낼 필요가 있다.

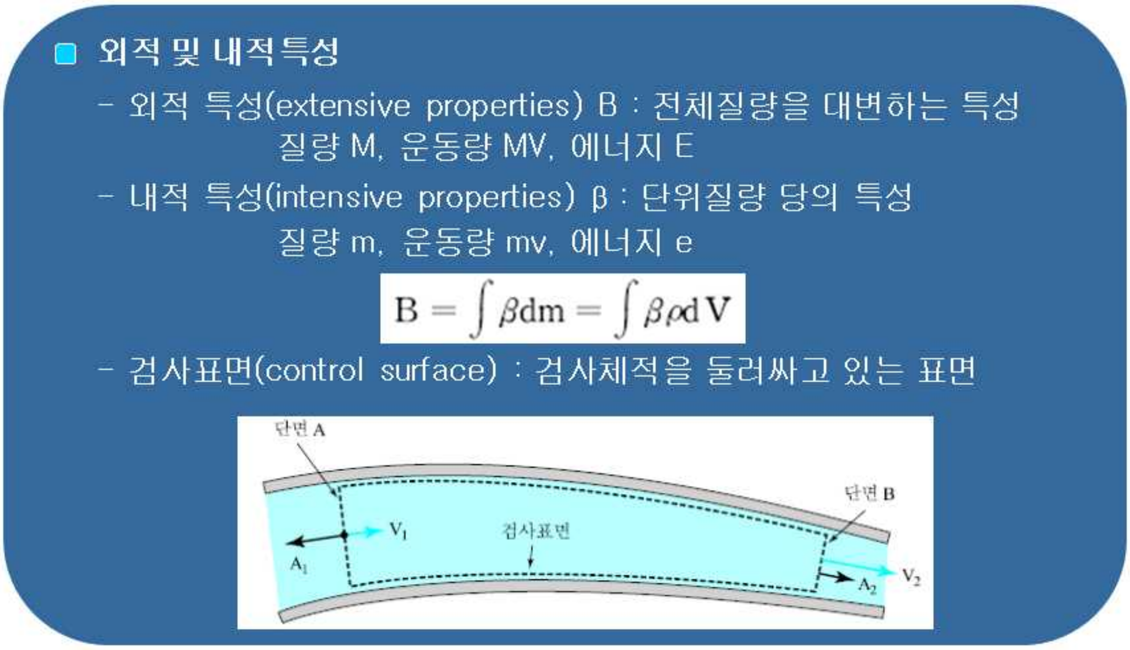
계내의 물질들이 갖는 임의의 물리량의 총량을 B라 하고, 단위 질량이 갖는 량을 β라 하

면 이들의 관계는 다음과 같다.

B=M(질량) : β=1
B=MV(운동량) : β=V
B=E(에너지) : β=e

레이놀즈 이송 정리:

$$\frac{dB}{dt})_{sys} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{c.v} \beta\rho dV + \int_{c.s} \beta\rho V \bullet dA$$



검사체적으로의 유입 및 유출

$$Q = \vec{V} \cdot \vec{A}$$

$$Q_{out} - Q_{in} = V_2 A_2 - V_1 A_1 = \vec{V}_2 \cdot \vec{A}_2 + \vec{V}_1 \cdot \vec{A}_1 = \sum_{cs} \vec{V} \cdot \vec{A}$$

- 질량흐름

$$\dot{m} = \sum_{cs} \rho \vec{V} \cdot \vec{A}$$

- 외적특성흐름

$$\frac{dB_{sys}}{dt} = \sum_{cs} \beta \rho \vec{V} \cdot \vec{A}$$ 또는 $$\frac{dB_{sys}}{dt} = \rho_2 A_2 V_2 \beta_2 - \rho_1 A_1 V_1 \beta_1$$

4) 연속방정식 유도(질량보존의 법칙)

$\frac{dB}{dt})_{sys} = 0$ B=mass, β=1

연속방정식(continuity equation)

연속방정식은 질량보존의 법칙에 바탕을 둔 식으로 검사체적과 같은 공간으로부터 유출되는 질량유량에서 공간으로 유입되는 질량유량을 뺀 것은 공간으로부터 방출된 질량유량과 같음을 의미

- 일반연속방정식

$$\frac{d(mass)}{dt} = \frac{d}{dt}\int_{cv} \rho dV + \int_{cs} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} \rightarrow \int_{cs} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} = -\frac{d}{dt}\int_{cv} \rho dV$$

$$\sum_{cs} \rho \vec{V} \cdot \vec{A} = -\frac{d}{dt}\int_{cv} \rho dV$$

흐름이 정상류이면

$$\int_{cs} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} = 0 \quad \text{또는} \quad \sum_{cs} \rho \vec{V} \cdot \vec{A} = 0$$

1차원 정상류 연속방정식

$$\Sigma \rho \vec{V} \cdot \vec{A} = 0 \quad \rightarrow \quad -\rho_1 V_1 A_1 + \rho_2 V_2 A_2 = 0$$

$$\therefore \quad \rho_1 V_1 A_1 = \rho_2 V_2 A_2$$

- 중량유량

$$\gamma V_1 A_1 = \gamma V_2 A_2$$

- 체적유량

$$V_1 A_1 = V_2 A_2$$

$$Q_1 = Q_2$$

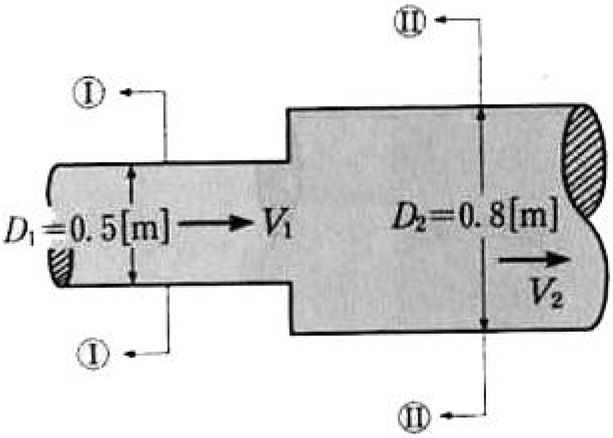
<예제 3.4> 그림과 같이 직경이 변하는 원관 속으로 유량이 0.25m^3/sec가 흐를 때 I, II단면의 평균유속을 계산하라.

(풀이) $Q = A_1 V_1 = A_2 V_2$

$$A_1 = \frac{\pi D_1^2}{4} = \frac{3.14 \times 0.5^2}{4} = 0.196\,m^2$$

$$A_2 = \frac{\pi D_2^2}{4} = \frac{3.14 \times 0.8^2}{4} - 0.502m^2$$

$$\therefore V_1 = \frac{Q}{A_1} = \frac{0.25}{0.196} = 1.27m/\sec,\ V_2 = \frac{Q}{A_2} = \frac{0.25}{0.502} = 0.50m/\sec$$



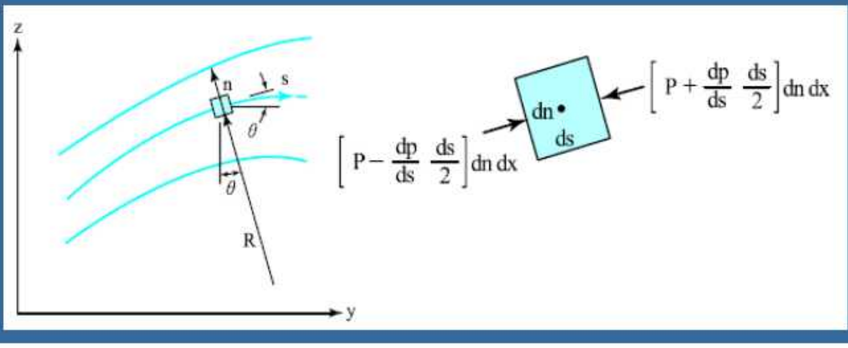
3.4 1차원 Euler(운동)방정식

Euler 방정식

- 미소 육면체에 Newton의 제 2법칙 적용

미소육면체의 양쪽면에 작용하는 압력차

$$\left(p-\frac{dp}{ds}\frac{ds}{2}\right)dndx-\left(p+\frac{dp}{ds}\frac{ds}{2}\right)dndx=-\frac{dp}{ds}dsdndx$$



Euler 방정식

미소 육면체 중량의 운동방향 성분

$$-\rho gdsdndx\sin\theta=-\rho gdsdndx\left(\frac{dz}{ds}\right)=-\rho gdzdndx$$

미소 육면체의 질량

$$dm=\rho dsdndx$$

유선방향의 가속도

$$a=\frac{dV}{dt}=\frac{dV}{ds}\frac{ds}{dt}=V\frac{dV}{ds}$$

Newton의 제 법칙 dF=dm·α를 적용

$$-\frac{dp}{ds}dsdndx-\rho gdzdndx=\rho dsdndxV\frac{dV}{ds}$$

Euler 방정식

양변을 ρdsdndx로 나누면

$$-\frac{1}{\rho}\frac{dp}{ds}-g\frac{dz}{ds}=V\frac{dV}{ds}$$

$$\therefore \quad \frac{1}{\rho}\frac{dp}{ds}+V\frac{dV}{ds}+g\frac{dz}{ds}=0$$

→ 1차원 정상류 흐름에 대한 Euler 방정식

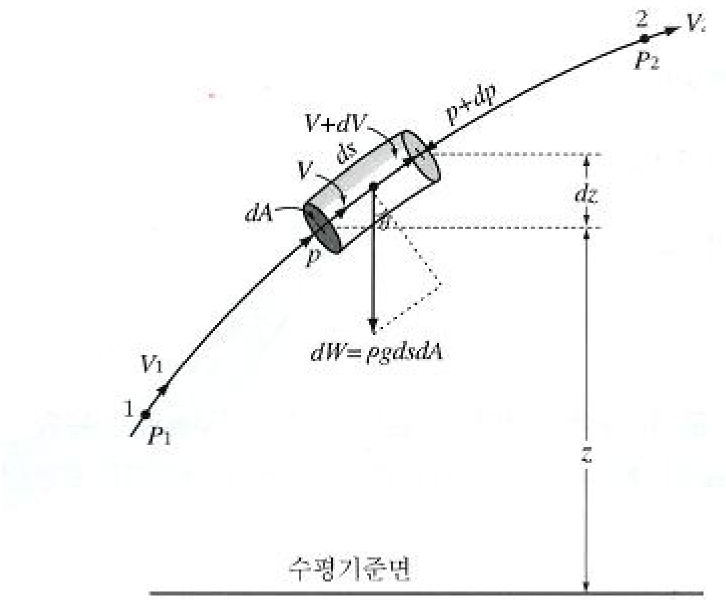


그림 3-9

유체는 점성 때문에 에너지 손실이 수반되나 이상유체로 가정하여 유체흐름 방정식을 간략화 할 수 있다.
그림에서 (Ⅰ),(Ⅱ) 구간에 작용하고 힘은 압력과 유체의 자중이다.

이때 압력변화율은 $\frac{\partial p}{\partial s}$이므로

p' = p + $\frac{\partial p}{\partial s}ds$이다.

때문에 이들의 합력에 의하여 유체는 S 방향으로 가속된다.
가속도 α는

$$\alpha = \frac{dv}{dt} = v\frac{\partial v}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial t}$$

F = mα에서

$$\frac{\rho A ds}{m}\left(v\frac{\partial v}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial t}\right) = Ap - Ap' - \rho g A ds \sin\theta$$

$$= Ap - A\left(p + \frac{\partial p}{\partial s}ds\right) - \rho g A ds \frac{\partial z}{\partial s}$$

$$\rho A ds\left(v\frac{\partial v}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial t}\right) = Ap - Ap' - A\frac{\partial p}{\partial s}ds - \rho g A ds \frac{\partial z}{\partial s}$$

$$\therefore \rho\left(v\frac{\partial v}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial t}\right) = -\frac{\partial p}{\partial s} - \rho g\frac{\partial z}{\partial s}$$

양변을 ρ로 나누면

⑩ - $v\left(\frac{\partial v}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial t}\right) = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial s} - g\frac{\partial z}{\partial s}$ (부정류에서의 Euler운동방정식)

정류에서는 $\frac{\partial v}{\partial t}$ = 0이므로

⑩ - 1 ∴ $v\frac{\partial v}{\partial s} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial s} - g\frac{\partial z}{\partial s}$ (정류에서의 Euler운동 방정식)

3.5 1차원 Bernoulli 방정식(정리)

1) Bernoulli방정식 유도

Bernoulli 방정식

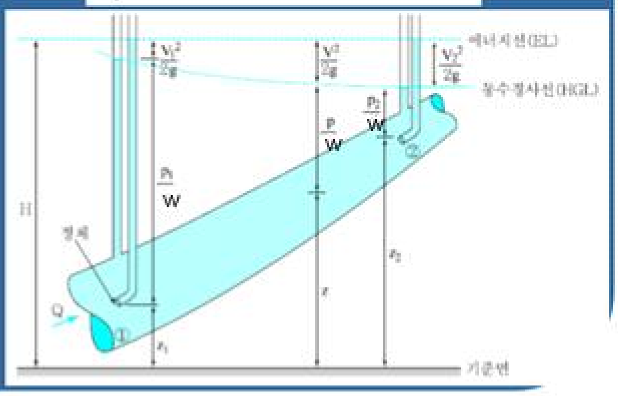
Euler 방정식에 ds를 곱하고 적분하면

$$\frac{dp}{\rho} + \frac{1}{2}d(V^2) + gdz = 0$$

$$\int \frac{dp}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz = 일정$$

$$\frac{p}{w} + \frac{V^2}{2g} + z = 일정 = H$$

$$\frac{p_1}{w} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 = \frac{p_2}{w} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2$$



정류에서의 Euler의 운동방정식에서

$$v\frac{\partial v}{\partial s} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial s} - g\frac{\partial z}{\partial s}$$

$$\therefore \quad v\frac{\partial v}{\partial s} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial s} + g\frac{\partial z}{\partial s} = 0$$

하나의 미분계수를 가지므로 적분하여 적분상수를 Ht라 하고
양변을 g로 나누어 정리하면

$$\frac{1}{2}v^2 + \frac{p}{\rho} + gz = Ht$$

$$\frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\rho g} + z = Ht$$

⑪ - $\frac{v^2}{2g} + \frac{p}{w} + z = Ht$ (Bernoulli 방정식)

$\frac{v^2}{2g}$: 속도수두(velocity head)

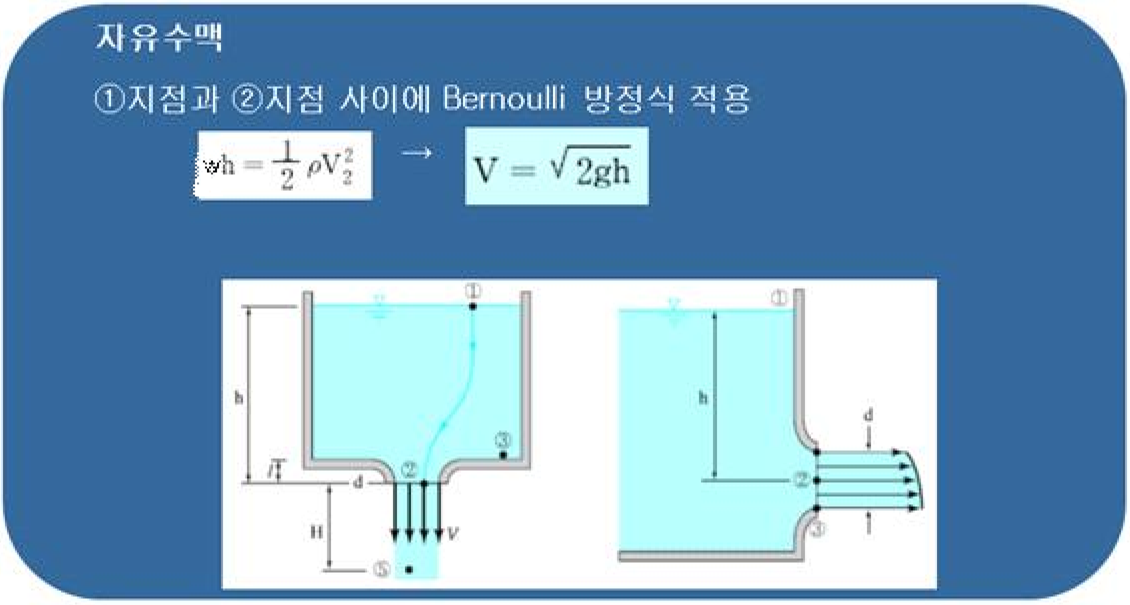
$\frac{P}{w}$: 압력수두(pressure head)

z : 위치수두(potential head)

H_t : 총수두(total head)

$\frac{v^2}{2g}$: $\frac{(m/\sec)^2}{m/\sec^2}$ = $\frac{m^2/\sec^2}{m/\sec^2}$ = m

2) Bernoulli 방정식 응용



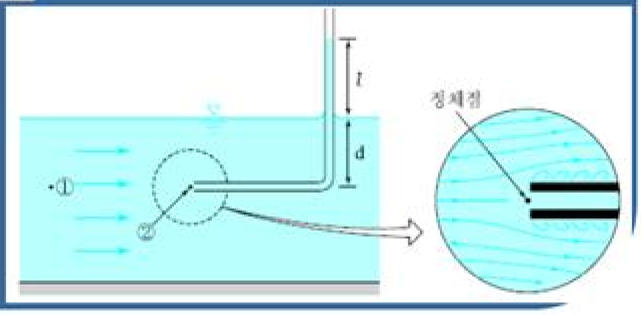
정체관

①지점과 ②지점 사이에 Bernoulli 방정식 적용

$$\rightarrow \quad V_1^2 = \frac{2}{\rho}(p_2 - p_1)$$

$$V_1^2 = \frac{2}{\rho}[w(l + d) - w d]$$

$$\therefore \quad V_1 = \sqrt{2g\,l}$$



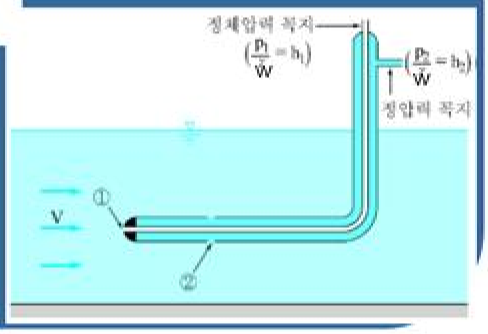
Pitot관

①지점과 ②지점 사이에 Bernoulli 방정식 적용

$$\frac{p_1}{w} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 = \frac{p_2}{w} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2$$

$$V_2 = \left\{2g\left[\left(\frac{p_1}{w} + z_1\right) - \left(\frac{p_2}{w} + z_2\right)\right]\right\}^{1/2}$$

$$\therefore \quad V = \sqrt{2g(h_1 - h_2)}$$

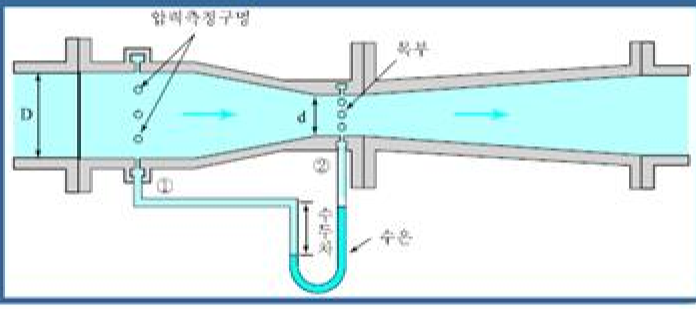


벤츄리메터

①지점과 ②지점 사이에 Bernoulli 방정식 적용

$$\frac{p_1}{w}+\frac{V_1^2}{2g}=\frac{p_2}{w}+\frac{V_2^2}{2g} \rightarrow V_2=\frac{1}{\sqrt{1-(A_2/A_1)^2}}\sqrt{2g\left(\frac{p_1-p_2}{w}\right)}$$

$$\therefore \; Q=\frac{A_2C_d}{\sqrt{1-(A_2/A_1)^2}}\sqrt{2g\Delta h}$$

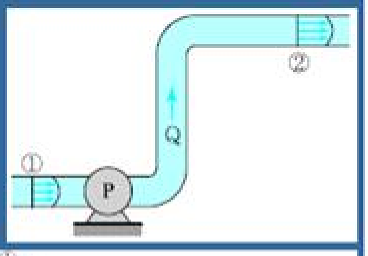


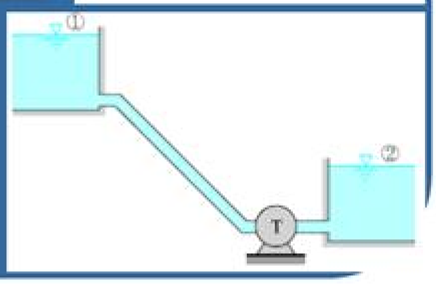
에너지 출입을 고려한 Bernoulli 방정식

- 펌프(E_P)와 터빈(E_T)

$$\frac{p_1}{w}+\frac{V_1^2}{2g}+z_1+E_P=\frac{p_2}{w}+\frac{V_2^2}{2g}+z_2$$

$$\frac{p_1}{w}+\frac{V_1^2}{2g}+z_1=\frac{p_2}{w}+\frac{V_2^2}{2g}+z_2+E_T$$



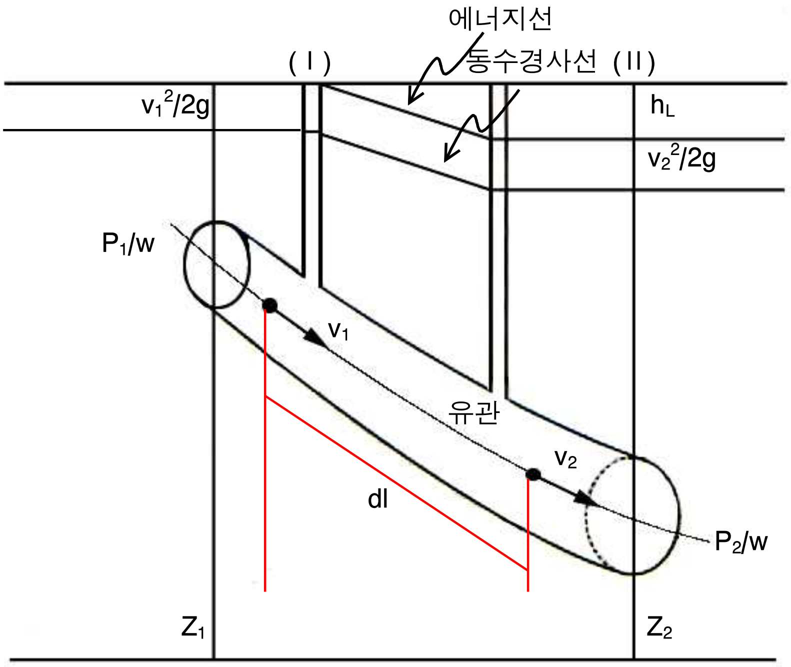


- 동력

$$QE(kg\cdot m/sec)=\frac{wQE}{102.04}(KW)$$

$$=\frac{wQE}{75}(HP)$$

[에너지선과 동수경사선]



기준수평면

h_L : 손실수두

◦ 에너지선(Energy line)

기준 수평면에서 위치수두, 압력수두, 속도수두 까지를 연결한선

즉 $z+\frac{p}{w}+\frac{v^2}{2g}$ 까지를 연결한 선

◦ 동수(수두)경사(구배)선(Hyraulic grade line)

기준 수평면에서 위치수두, 압력수두 까지를 연결한 선

즉 $z+\frac{p}{w}$ 까지를 연결한 선

그림에서 (I), (II) 단면 사이에 Bernoulli 정리를 적용하면

$$\frac{v_1^2}{2g}+\frac{p_1}{w}+z_1 = \frac{v_2^2}{2g}+\frac{p_2}{w}+z_2$$

$$= \frac{V_2^2}{2g}-\frac{V_1^2}{2g}$$

$$= d(\frac{V^2}{2g})$$

양변을 미소거리 dl로 나누면

$$\frac{dh}{dl}=\frac{d}{dl}(\frac{V^2}{2g})=I$$

⑫ - $I=\frac{dh}{dl}$ - 동수경사선

* Bernoulli 방정식

(1) 일반형

$$\frac{v^2}{2g}+\frac{p}{w}+z_1+h_L = \text{const}$$

(2) 압력항 이론

Bernoulli 정리의 각 항에 w = ρg 곱하면

$\rho v^2/2$ + p + ρgz = const

동압력+(수압력+ 위치압력)=일정

동압력 + 정압력 = 총압력

(3) 미분법

$$(\frac{v^2}{2g})-\frac{d}{dx}(\frac{p}{w})+\frac{dz}{dx}+\frac{dh_L}{dx}=const$$

<1차원 Bernoulli 정리의 응용>

[1] Torricelli의 정리

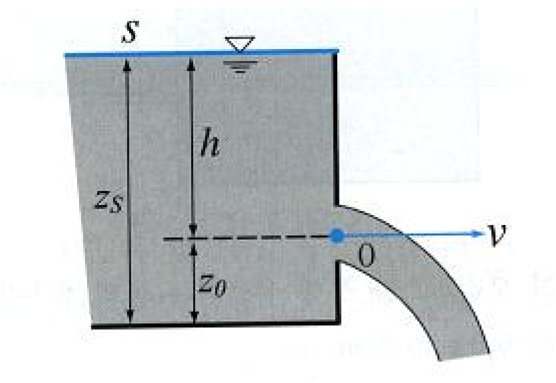


그림 3-13

그림과 3-13과 같이 물통의 측벽에 작은 구멍을 뚫어 물을 퇴출시킬 때 유출속도 v는 수면과 수면사이의 Bernoulli 정리를 적용하면

$$\frac{v_s^2}{2g}+\frac{p_s}{w}+z_s=\frac{v^2}{2g}+\frac{p}{w}+z$$

① $p_s=p_a$: 대기압으로 무시

② $v_s \fallingdotseq 0$

$$\therefore \; Z_s - Z = \frac{v^2}{2g}$$

$$h = \frac{v^2}{2g}$$

$$v = \sqrt{2gh}$$

실제는 $v = C_v \sqrt{2gh}$

C_v : 유속계수(0.95 – 0.99)

<예제 3.5> 그림과 같이 직경이 0.1m의 오리피스를 통해 유출되는 유량은 얼마인가?

(풀이) $v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \times 9.81 \times 6.0} = 10.85 m/\sec$

$$Q = vA = v\frac{\pi d^2}{4} = 10.85 \times \frac{3.14 \times 0.1^2}{4} = 0.085 m^3/\sec$$

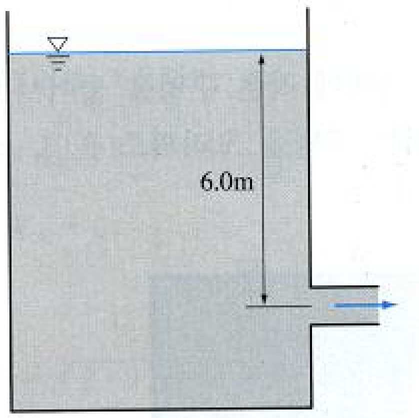


그림 3-14

[2] Pitot tube(피토관)

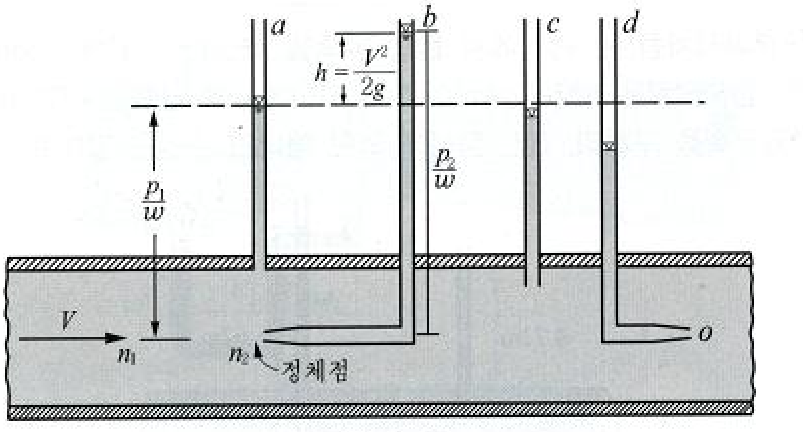


그림 3-15

흐르는 수로 속에 L자 유리관을 세워 동압(h)를 측정하고, 수로 속의 하나의 유선상에 Bernoulli 정리를 적용하여 V_s를 구한다.

$$\frac{1}{2}\rho v^2 + \frac{p}{w} + z\rho g = const$$

동압력 + 정압력 = 총압력

그림에서

$$\frac{1}{2}\rho v^2 + p_0 = p_s$$

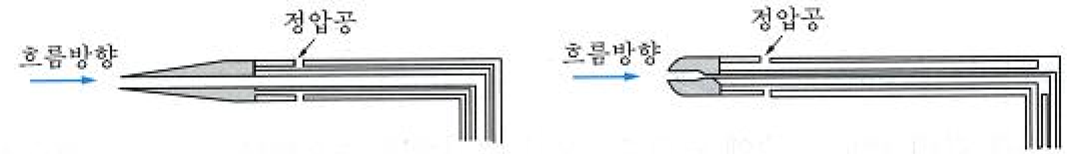
$$p_0 = wh_0$$

$$p_s = wh_0 + wh$$

$$\frac{1}{2}\rho v^2 + wh = wh_0 + wh$$

양변을 $w = \rho g$로 나누면

$$\frac{V_2}{2g} = h \;\therefore\; v = \sqrt{2gh}$$



(a) Brabbee의 디자인 (b) Prandtl의 디자인

그림 3-16

<예제 3.6> 그림 3-17과 같이 관의 중심에서 물의 유속을 측정하기 위해 피토관이 사용된다. B지점에서 정체압력이 $5{,}570kg/m^2$이고 A지점의 압력은 $4{,}720kg/m^2$이다. A지점에서 평균 유속을 구하라. 단, 점성에 의한 에너지손은 없다고 가정한다.

(풍이) A, B점에 베르누이정리를 적용하면

$$\frac{V_A^2}{2g} + \frac{p_A}{w} + Z_A = \frac{V_B^2}{2g} + \frac{p_B}{w} + Z_B$$

$$Z_A = Z_B = 0$$

$$\frac{p_A}{w} = \frac{4{,}720}{1{,}000} = 4.72m$$

$$\frac{p_B}{w} = \frac{5{,}670}{1{,}000} = 5.67m$$

$$V_B = 0$$

$$\frac{V_A^2}{2g} = \frac{p_B}{w} - \frac{p_A}{w}$$

$$V_A = \sqrt{2g(\frac{p_B}{w} - \frac{p_A}{w})}$$

$$= \sqrt{2 \times 9.81 \times (5.67 - 4.72)} = 4.42 m/\sec$$

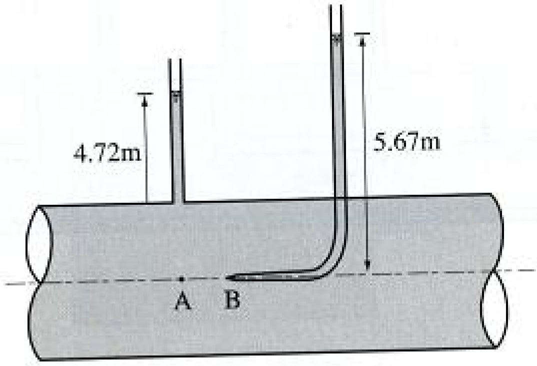


그림 3-17

[3] Venturi meter

관수로 속의 유량을 측정하는 장치로 이것의 설치로 인한 압력손실이 적은 이점이 있다.

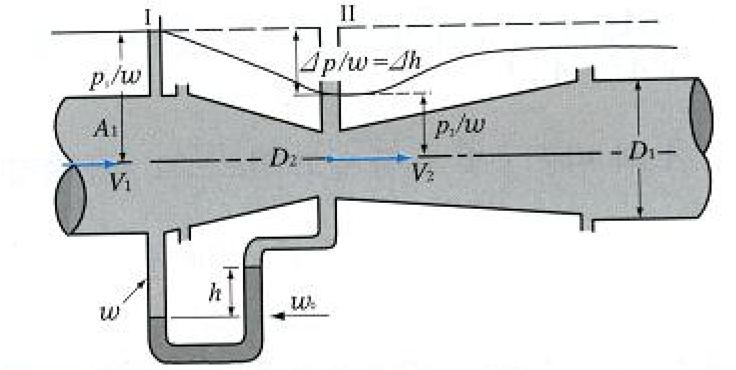


그림 3-18 벤츄리미터

A_1 , A_2 : I , II 단면의 단면적

v_1 , v_2 : I , II 단면에서의 유속

I , II 단면 사이에 Bernoulli 정리를 적용시키면

$$\frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{w} + z_1 = \frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{w} + z_2$$

관이 수평이면 $z_1 = z_2$ 이고,

$$\frac{v_1^2}{2g} + \frac{v_2^2}{2g} = \frac{p_2}{w} + \frac{p_1}{w} \quad \text{--- ①}$$

연속방정식에서

Q = A_1v_1 = A_2v_2 $v_2 = \frac{A_1}{A_2} v_1$ 이것을 ①식에 대입하면

$$\frac{v_1^2}{2g}+\frac{1}{2g}(\frac{A_1}{A_2}v_1)=\frac{p_2}{w}+\frac{p_1}{w}$$

$$\frac{v_1^2}{2g}[1-(\frac{A_1}{A_2})^2]=\frac{p_2}{w}-\frac{p_1}{w}$$

$$\frac{v_1^2}{2g}(\frac{A_2^2-A_1^2}{A_2^2})=\frac{p_2-p_1}{w}$$

$\therefore\ v_1=\frac{A_2}{\sqrt{A_2^2-A_1^2}}\sqrt{2g\frac{p_2-p_1}{w}}$ 이 때 $\frac{p_2-p_1}{w}=\Delta h$ 이므로

⑬ - $v_1=\frac{A_2}{\sqrt{A_2^2-A_1^2}}\sqrt{2g\Delta h}$ (Venturi meter의 유속공식)

압력을 U자관으로 측정할 때 압력차를 h로 표시하면 $p_1-p_2=h(w_o-w)$이므로

$$\Delta h=\frac{p_1-p_2}{w}=h(\frac{w_o}{w}-1)=h(\frac{s_o}{s}-1)$$

$$v_1=\frac{A_2}{\sqrt{A_1^2-A_2^2}}\sqrt{2gh(\frac{s_o}{s}-1)}$$

유량의 연속방정식에서

$$Q=A_1v_1=\frac{A_1A_2}{\sqrt{A_2^2-A_1^2}}\sqrt{2gh(\frac{s_o}{s}-1)}$$

<예제 3.7> 그림 3-19에서 $D_1=20cm,\ D_2=8cm$이며, 수은 시차압력계에 의한 수두차 $h=9cm$일 때 관내에 흐르는 유량을 구하라.

(풀이) $A_1=\frac{\pi D_1^2}{4}=\frac{3.14\times 20^2}{4}=314cm^2$

$$A_2=\frac{\pi D_2^2}{4}=\frac{3.14\times 8^2}{4}=50.24cm^2$$

$$V_1=\frac{A_2}{\sqrt{A_1^2-A_2^2}}\sqrt{2gh(\frac{s_o}{s}-1)}$$

$$=\frac{50.24}{\sqrt{314^2-50.24^2}}\sqrt{2\times 980\times 9\times(\frac{13.55}{1}-1)}=79.77cm/\sec$$

$$Q=A_1V_1=314\times 79.77=25{,}047.8cm^3/\sec\fallingdotseq 0.025m^3/\sec$$

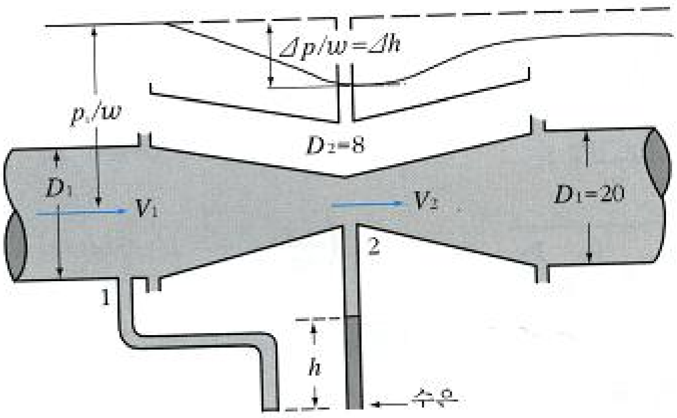
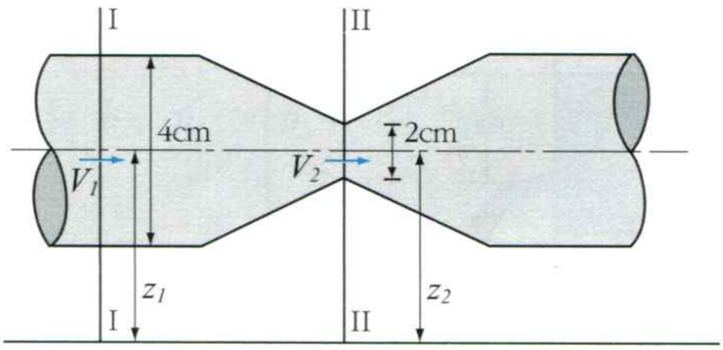


그림 3-19

<예제 3.8> 그림과 같이 직경 4cm(1단면)에서 2cm(2단면)로 점축소되는 원형관이 수평으로 연결된 채 설치되어 물이 흐르는 경우, 각 단면의 유속 V_1, V_2 및 압력 p_2를 계산하라. 단, 1단면의 압력 $p_1 = 5{,}000 kg/m^2$, 유량 $Q = 2l/\sec$이다.



(풀이) Ⅰ-Ⅰ, Ⅱ-Ⅱ 단면에 대하여 베르누이 정리를 적용하면

$$z_1 = z_2,\ \frac{p_1}{w} = 5m,\ V_1 = \frac{4Q}{\pi D_1^{\ 2}},\ V_2 = \frac{4Q}{\pi D_2^{\ 2}}$$

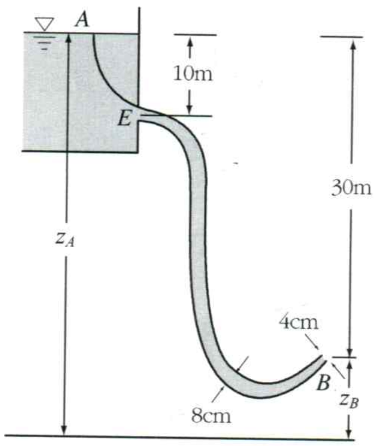
$$V_1 = \frac{4 \times 0.002}{3.14 \times 0.04^2} = 1.59 m/\sec,\ V_2 = \frac{4 \times 0.002}{3.14 \times 0.02^2} = 6.37 m/\sec$$

$$5 + \frac{1.59^2}{2 \times 9.8} = \frac{p_2}{w} + \frac{6.37^2}{2 \times 9.8}$$

$$\frac{p_2}{w} = 5 - 1.94 = 3.06 m$$

$$p_2 = 3.06 \times 1{,}000 = 3{,}060 kg/m^2$$

<예제 3.9> 그림과 같은 저수지에서 관로를 이용하여 도수(導水)할 경우 말단의 유속 V_B와 유량 Q및 E점에서의 압력을 구하라. (단, 손실은 무시한다.)



(풀이) A, B점에 베르누이 정리를 적용하면

$$z_A + \frac{p_A}{w} + \frac{V_A^2}{2g} = z_B + \frac{p_B}{w} + \frac{V_B^2}{2g}$$

$p_A = p_B =$ 대기압, $V_A = 0$

$$z_A = z_B + \frac{V_B^2}{2g}$$

$$V_B = \sqrt{2g(z_A - z_B)} = \sqrt{2 \times 9.8 \times 30} = 24.25m/s$$

유량 $Q = \frac{\pi}{4} \times 0.04^2 \times 24.25 = 0.0305m^3/s = 30.5l/s$

E점의 압력을 p_E라 하고 베르누이 정리를 적용하면,

$$z_A + \frac{p_A}{w} + \frac{V_A^2}{2g} = z_E + \frac{p_E}{w} + \frac{V_E^2}{2g}$$

$V_A = 0$, $z_A - z_E = 10m$

$$V_E = (\frac{D_B}{D_E})^2 V_B = (\frac{0.04}{0.08})^2 \times 24.25 = 6.06m/s$$

$$\frac{p_E}{w} = 10 - \frac{6.06^2}{2 \times 9.8} = 10 - 1.874 = 8.126m$$

$$p_E = 0.81kg/cm^2$$

3.6 운동량 방정식

운동량 방정식의 유도

$$\frac{dB_{sys}}{dt} = \frac{d}{dt}\int_{cv}\beta\rho dV + \int_{cs}\beta\rho\vec{V}\cdot d\vec{A}$$

$$\frac{d(\text{운동량})}{dt} = \int_{cs}\vec{V}\rho\vec{V}\cdot d\vec{A} + \frac{d}{dt}\int_{cv}\vec{V}\rho dV$$

- Newton의 제2법칙 적용

$$\Sigma\vec{F} = \int_{cs}\vec{V}\rho\vec{V}\cdot\vec{A} + \frac{d}{dt}\int_{cv}\vec{V}\rho dV$$

$$\Sigma\vec{F} = \sum_{cs}\vec{V}\rho\vec{V}\cdot\vec{A}$$

- 정상류인 경우

$$\Sigma\vec{F} = \vec{V_1}(-\rho\vec{V_1}\ \vec{A_1}) + \vec{V_2}(+\rho\vec{V_2}\ \vec{A_2}) = \rho Q(\vec{V_2} - \vec{V_1})$$

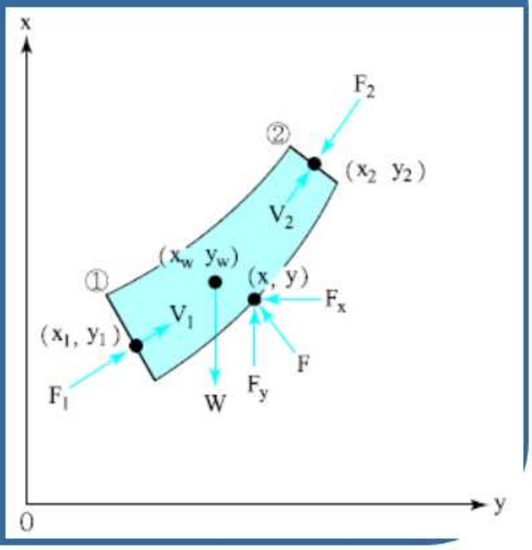
운동량 방정식의 유도

- x, y, z 방향에 대한 운동량 방정식

x방향 : $\Sigma F_x = \rho Q(V_{2x} - V_{1x})$

y방향 : $\Sigma F_y = \rho Q(V_{2y} - V_{1y})$

z방향 : $\Sigma F_z = \rho Q(V_{2z} - V_{1z})$



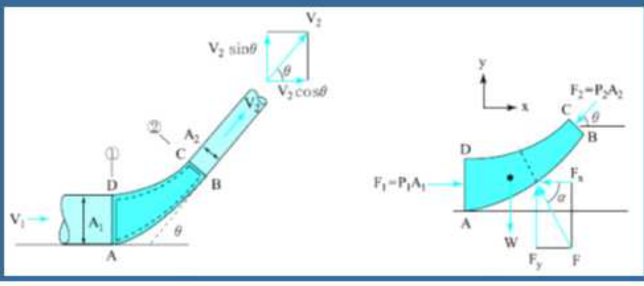
만곡관의 벽에 작용하는 힘

$$F_x = F_{1x} - F_{2x} - \rho Q(V_{2x} - V_{1x})$$
$$= p_1 A_1 - p_2 A_2 \cos\theta - \rho Q(V_2 \cos\theta - V_1)$$

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$$

$$F_y = -F_{1y} + F_{2y} + W + \rho Q(V_{2y} - V_{1y})$$
$$= 0 + p_2 A_2 \sin\theta + W + \rho Q(V_2 \sin\theta - 0)$$

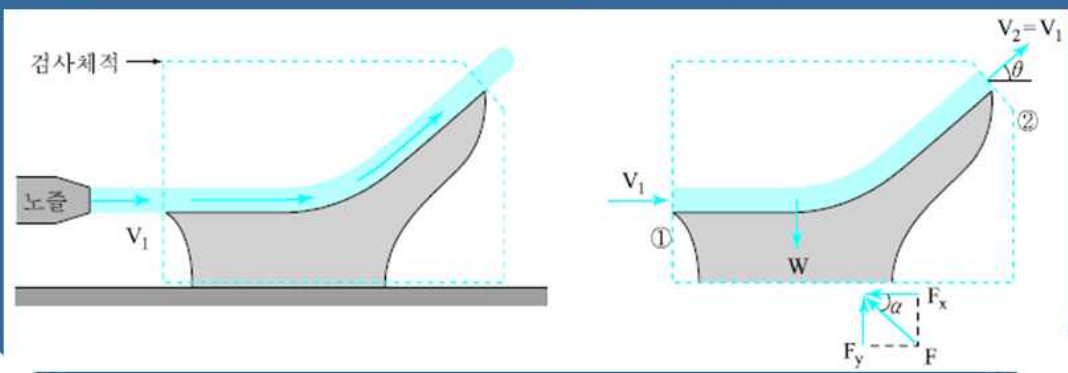
$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{F_y}{F_x}\right)$$



고정날개에 작용하는 힘

$$\Sigma F_x = -F_x = \rho Q(V_{2x} - V_{1x}) \rightarrow F_x = -\rho Q(V_2 \cos\theta - V_1)$$

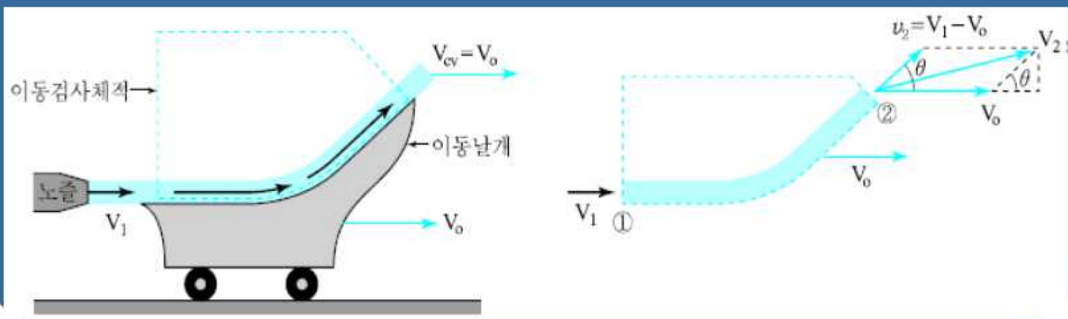
$$\Sigma F_y = -W + F_y = \rho Q(V_{2y} - V_{1y}) \rightarrow F_y = W + \rho Q(V_2 \sin\theta - 0)$$



이동날개에 작용하는 힘

$$\Sigma F_x = -F_x = \rho Q(V_{2x} - V_{1x}) \rightarrow F_x = \rho Q(V_1 - V_o)(1-\cos\theta)$$

$$\Sigma F_y = F_y = \rho Q(V_{2y} - V_{1y}) \rightarrow F_y = \rho Q(V_1 - V_o)\sin\theta$$



이동날개에 의한 발생동력

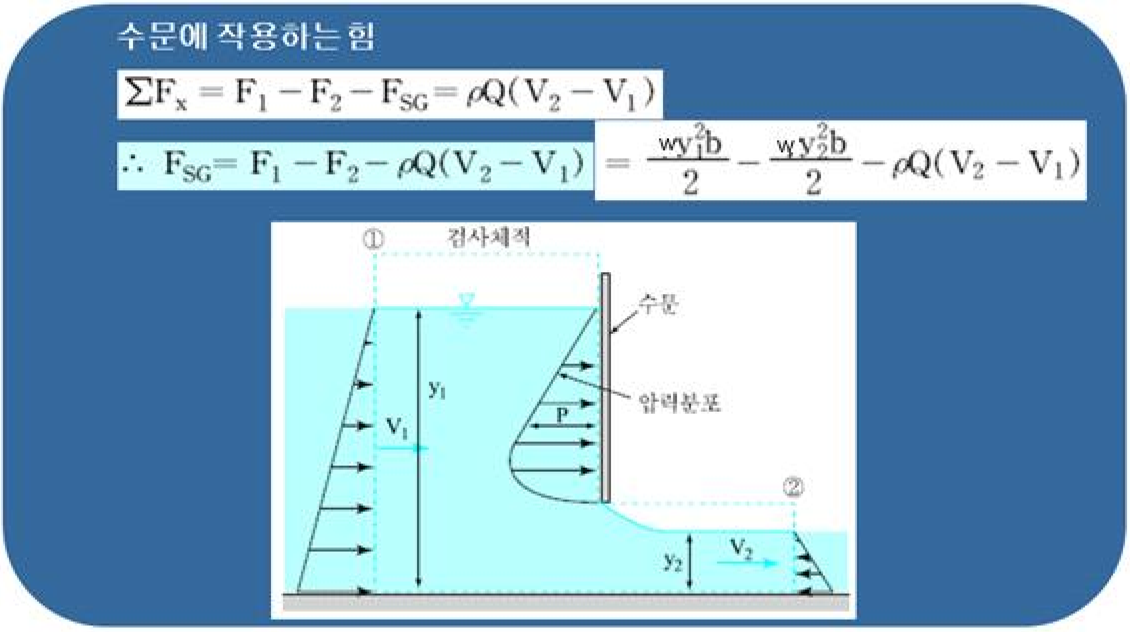
$$P = F_x V_o = \rho Q(V_1 - V_o)(1-\cos\theta)V_o$$

$$\frac{dP}{dV_o} = \rho Q(1-\cos\theta)(V_1 - 2V_2) = 0 \qquad \therefore V_o = \frac{1}{2}V_1$$

- 최대동력

$$P_m = \rho Q\left(V_1 - \frac{V_1}{2}\right)(1-\cos\theta)\frac{V_1}{2} = \frac{1}{4}\rho Q V_1^2(1-\cos\theta)$$

$$\therefore P_m = \frac{1}{2}\rho Q V_1^2 = wQ\frac{V_1^2}{2g}$$



<역적(力積) - 운동량 방정식> - (Impulse - Momentum equation)

1차원의 정류에서 연속방정식과 Bernoulli 정리로 해결할 수 없는 문제는 에너지 이론과 더불어 사용하면 쉽게 해결할 수 있다.

미소시간 dt 사이에 유속이 v_1에서 v_2로 변했을 때 외력의 합력을 ΣF라 하면

Σ F = mα에서

$$\therefore\ \Sigma F = m\frac{V_2 - V_1}{dt}$$

$\Sigma F \cdot dt = m(v_2 - v_1)$

다시 쓰면

$$\Sigma F = m\frac{V_2 - V_1}{dt}$$

여기서

$\frac{m}{dt}$: 체적질량 = ρAv = ρQ

이 때의 합력을 P라 하면

$P = \rho Q(v_2 - v_1)$

$= \frac{w}{g}Q(v_2 - v_1)$

⑭ - $P = \frac{w}{g}Q(v_2 - v_1)$ (운동량 방정식)

<예제 3.10> 수평으로 설치된 그림 3-24와 같은 곡관에 물이 흐른다. 단면 1과 2의 직경이 각각 40cm와 30cm이고 유량이 $0.35m^3/\sec$일 때, 곡관의 벽에 작용하는 힘을 구하라. 단면 1의 압력 $p_1 = 15$, $\theta = 60°$ 이다.

(풀이) $$V_1 = \frac{Q}{A_1} = \frac{0.35}{\pi(0.4)^2/4} = 2.78\,m/s$$

$$V_2 = \frac{Q}{A_2} = \frac{0.35}{\pi(0.3)^2/4} = 4.95\,m/s$$

베르누이 정리로부터

$$\frac{p_1}{w} + \frac{V_1^{\,2}}{2g} = \frac{p_2}{w} + \frac{V_2^{\,2}}{2g}$$

$$\frac{15}{1} + \frac{2.78^2}{2\times 9.8} = \frac{p_2}{1} + \frac{4.95^2}{2\times 9.8}$$

$$\therefore p_2 = 14.14 \quad \text{ton}/m^2$$

운동량 방정식에서

$$P_x = 15\times 0.126 - 14.14\times 0.0707\times \cos 60° - \frac{1}{9.8}\times 0.35\times(4.95\cos 60° - 2.78)$$

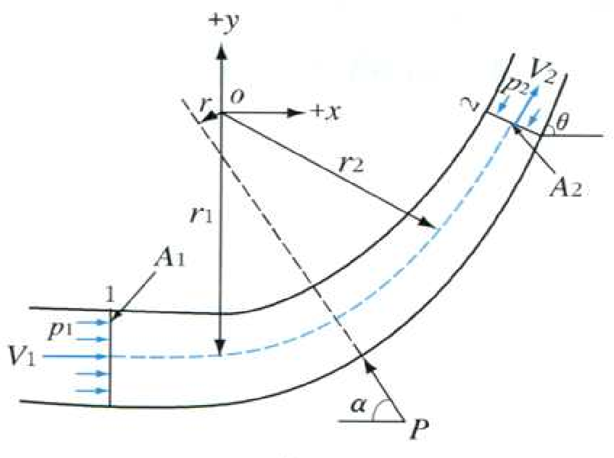
$$= 1.4\,\text{ton}$$

$$P_y = 14.14\times 0.0707\times \sin 60° + \frac{1}{9.8}\times 0.35\times(4.95\sin 60°)$$

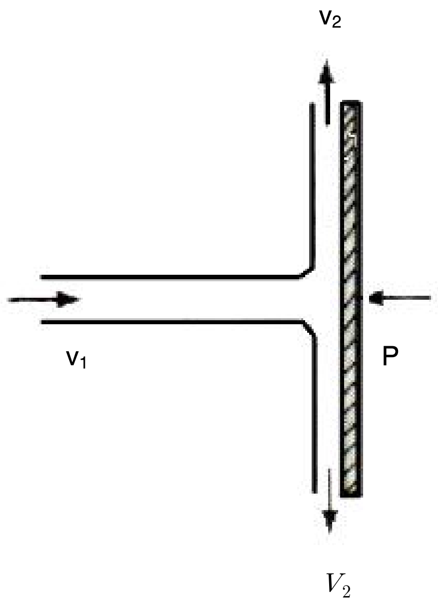
$$= 1.02\,\text{ton}$$

$$P = \sqrt{1.4^2 + 1.02^2} = 1.78\,\text{ton}$$

작용방향 : $a = \tan^{-1}\frac{P_x}{P_y} = \tan^{-1}(\frac{1.02}{1.4}) = \tan^{-1}(0.73) = 36.1°$



<예제 3.11> 판에 작용하는 수압 P는?



$$-P = \frac{w}{g}Q(v_2 - v_1)$$

$$P = \frac{w}{g}Qv_1$$

$$v_2 = v_1\cos 90 = 0$$

<예제 3.12> $Q = 0.05m^3/\sec$, 단면적 $a_1 = a_2 = 200cm^2$의 수맥이 1/4원의 벽면을 따라 흐를 때 벽면이 받는 힘은 얼마인가?

(풀이) x, y좌표를 그림과 같이 정하고, x, y방향의 분력을 계산한다.

$$a_1 = a_2 = 200cm^2 = 0.02m^2$$

$$V_1 = V_2 = \frac{Q}{a_1} = \frac{0.05}{0.02} = 2.5\,m/\sec$$

$$P_x = \frac{w}{g}Q(V_2\cos\theta_2 - V_1\cos\theta_1)$$

$$= \frac{1}{9.8}\times 0.05\times(2.5\cos 0^\circ - V_1\cos 90^\circ)$$

$$= \frac{1}{9.8}\times 0.05\times 2.5 = 0.01275\,\mathrm{ton}$$

$$P_y = \frac{w}{g}Q(V_2\cos\theta_2 - V_1\cos\theta_1)$$

$$= \frac{1}{9.8}\times 0.05\times(2.5\sin 0^\circ - 2.5\sin 90^\circ)$$

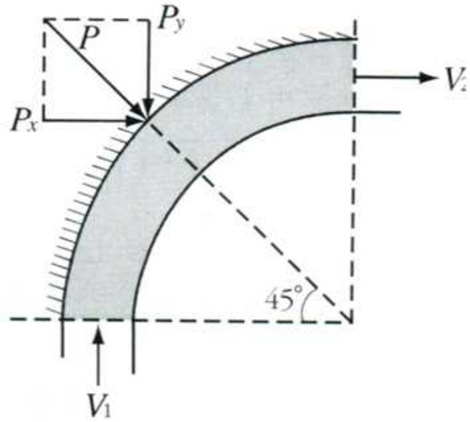
$$= \frac{1}{9.8}\times 0.05\times(-2.5) = -0.01275\,\mathrm{ton}$$

따라서 x방향의 반력은 x의 (+)방향으로 작용하고, y방향의 반력은 y의 (-)방향으로 작용한다.

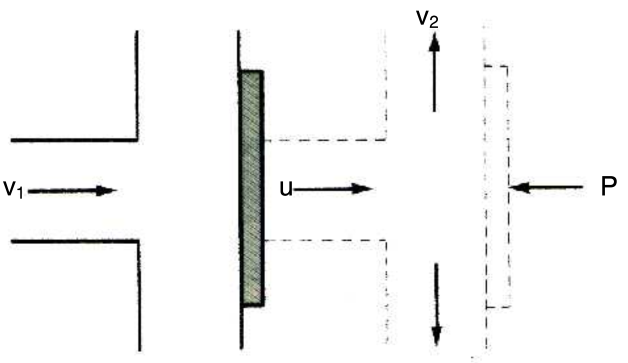
유체가 벽면에 대하여 작용하는 힘의 부호가 반대가 된다.

$$P = \sqrt{P_x^{\,2} + P_y^{\,2}} = \sqrt{0.01275^2 + 0.01275^2} \fallingdotseq 0.0184\,\mathrm{ton}$$

$$a = \tan^{-1}\left(-\frac{0.01275}{0.01275}\right) = \tan^{-1}(-1) = -45^\circ$$



<예제 3.13> 운동량 방정식에서 판이 U속도로 움직일 때 작용 압력 P?



$$P = \frac{w_0}{g} Q(v_2 - v_1)$$

$$= \frac{w_0}{g} AV(v_2 - v_1)$$

$$= \frac{w_0}{g} A(v_1 - u)^2$$

<**예제** 3.14> 그림 3-28과 같이 $u = \pm 15m/\sec$의 속도로 이동하는 날개에 직경 8cm의 분류가 $40m/\sec$의 속도로 충돌할 때 날개에 작용하는 힘을 구하라.

(풀이) 날개의 속도를 u, 분류의 속도를 V라 하면 날개에 충돌하는 속도는 $(V-u)$가 되므로 상대속도 $V-u = 40-15 = 25m/\sec$를 대입한다.

$$Q = (V-u)A = 25 \times \frac{\pi}{4}(0.08)^2 = 0.126\,m^3/\sec$$

$$P_x = \frac{w}{g} Q(V_{x2} - V_{x1})$$

$$= \frac{1}{9.8} \times 0.126 \times (25\cos 150^\circ - 25) = -0.599\,\mathrm{ton}$$

분류가 날개에 작용하는 힘 $F_x = +0.599\text{ton}$

$$P_y = \frac{w}{g}Q(V_{y2} - V_{y1})$$

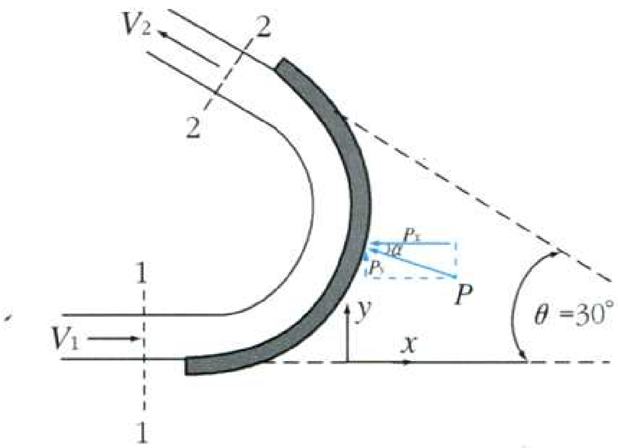
$$= \frac{1}{9.8} \times 0.126 \times (25\sin 150^\circ - 0)$$

$$= 0.161\text{ton}$$

분류가 날개에 가하는 힘 $F_y = -0.161\text{ton}$

$\therefore F = \sqrt{{F_x}^2 + {F_y}^2} = 0.620\text{ton}$

작용방향 : $a = \tan^{-1}(\frac{0.161}{0.599}) = \tan^{-1}(0.269) = 15^\circ 4'$



<예제 3.15> 그림 3.29와 같은 경사진 수문에 흐름이 가하는 힘 F를 구하라. 단, 수문의 폭은 1m, 수문은 수평면과 60° 의 경사를 이루고 있다.

(풀이) Bernoulli 정리로부터

$$\frac{{V_1}^2}{2g} + 1.6 = \frac{{V_2}^2}{2g} + 0.7$$

연속방정식에서 $q = 1.6\,V_1 = 0.7\,V_2$

연립해를 구하면

$V_1 = 2.04\,m/\text{sec},\ V_2 = 4.67\,m/s$

$q = 3.27\,m^3/\text{sec}/m$

$$F_1 = w\frac{h_1^2}{2} = 1 \times \frac{1.6^2}{2} = 1.28\text{ton}$$

$$F_2 = w\frac{h_2^2}{2} = 1 \times \frac{0.7^2}{2} = 0.245\text{ton}$$

운동량방정식에 대입하면

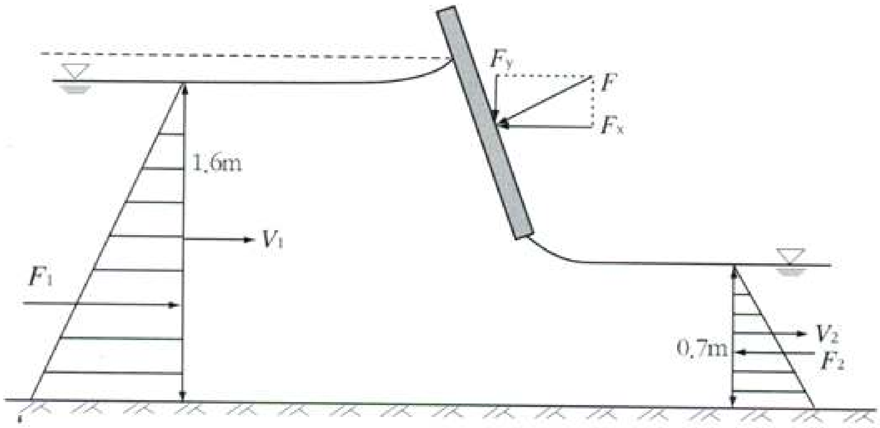
$$\sum F_x = 1.28 - F_x - 0.245 = \frac{1}{9.8} \times 3.27(4.67 - 2.04)$$

$\therefore F_x = 0.157\text{ton}$

수문과 연직면과의 각을 θ라 하면

$F_x = F \cdot \cos\theta$

$$\therefore F = \frac{F_x}{\cos\theta} = \frac{0.157}{\cos 30^\circ} = 0.181\text{ton}$$



<예제 3-16> 그림과 같은 2차원 원심펌프의 임펠러의 $r_1 = 8\,cm$, $r_2 = 25\,cm$, $\beta_1 = 120^\circ$, $\beta_2 = 135^\circ$이며 두께는 2.5cm이다. 유입구에서의 접선방향 속도성분이 영이 되도록 분류가 유입하며 유량은 150 l/sec이다. 이때의 임펠러의 회전속도(rpm)와 유발되는 토크 및 동력, 단위무게의 물에 가해지는 에너지. 그리고 임펠러를 통한 압력강하량을 계산하라.

(풀이) 유입구에서의 접선방향 속도성분이 없으므로

$$V_1 = V_{r1} = \frac{Q}{2\pi r_1 b_1} = \frac{0.15}{2\pi \times 0.08 \times 0.025} = 11.93\,m/\sec$$

$$V_{r2} = \frac{0.15}{2\pi \times 0.25 \times 0.25} = 3.83\,m/\sec$$

아래 그림의 벡터선도로부터

$$u_1 = wr_1 = V_1 \tan 30^\circ = 11.93 \times \frac{1}{\sqrt{3}} = 6.9\,m/\sec$$

$$\therefore w = \frac{u_1}{r_1} = \frac{6.9}{0.08} = 86.4\,rad/\sec = 825\,rpm$$

$$u_2 = wr_2 = 86.4 \times 0.25 = 21.6\,m/\sec$$

$$V_{t_2} = u_2 - V_{t_2}\tan 45^\circ = 21.60 - 3.83 = 17.77\,m/\sec$$

$$T = \frac{1,000}{9.8} \times 0.15(17.77 \times 0.25 - 0) = 68\,kg \cdot m$$

$$P = \frac{68 \times 86.4}{75} = 78.25\text{마력}$$

$$\frac{1{,}000 \times 0.15\,E_P}{75} = 78.25 \qquad \therefore\ E_P = 39.1\,kg \bullet m/kg = 39.1\,m$$

벡터선도로부터

$$V_1 = V_{r1} = 11.93\,m/\mathrm{sec}$$

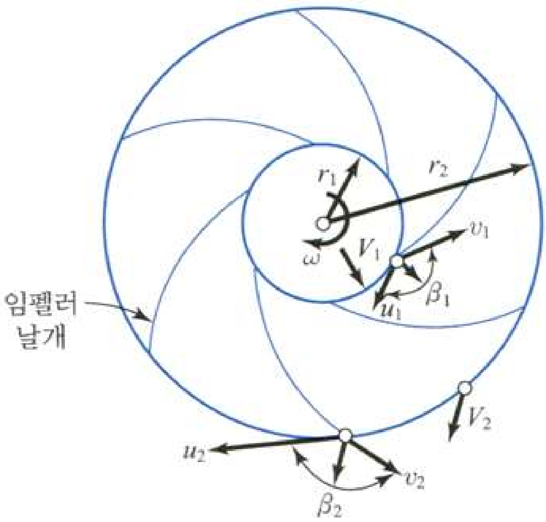
$$V_2 = \sqrt{(3.83)^2 + (17.77)^2} = 18.19\,m/\mathrm{sec}$$ [1]

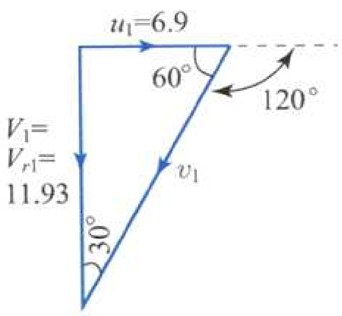
단면 1과 2사이에 Bernoulli 방정식을 적용하면

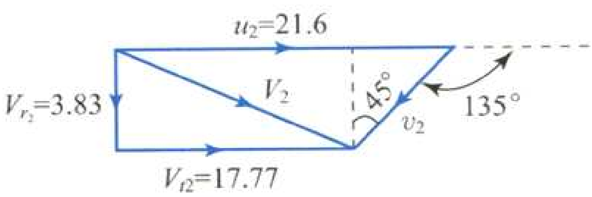
$$\frac{p_1}{w} + \frac{(11.93)^2}{2g} + 39.1 = \frac{p_2}{w} + \frac{(18.19)^2}{2g}$$

$$\frac{(p_2 - p_1)}{w} = 39.1 + \frac{1}{2 \times 9.8}[(11.93)^2 - (18.19)^2] = 29.5\,m$$

$$\therefore\ p_2 - p_1 = 29{,}500\,kg/m^2 = 2.95\,kg/cm^2$$







3.7 에너지 보정 계수

에너지 보정계수

단면을 통해 흐르는 유체의 총 운동에너지

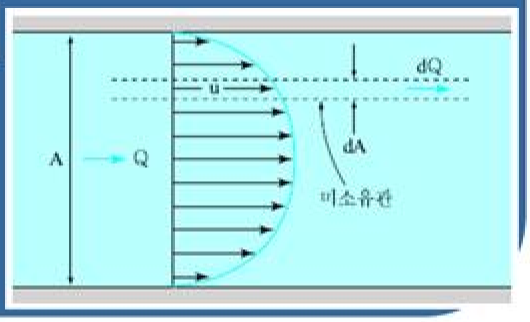
$$wQ\frac{V^2}{2g}=\frac{\rho}{2}AV^3$$

미소유관을 통한 운동에너지

$$wdQ\frac{u^2}{2g}=\frac{\rho u^3 dA}{2} \rightarrow \frac{\rho}{2}\int_A u^3 dA$$

$$\alpha\frac{\rho}{2}AV^3=\frac{\rho}{2}\int_A u^3 dA$$

$$\therefore \quad \alpha=\frac{1}{A}\int_A\left(\frac{u}{V}\right)^3 dA$$



운동량 보정계수

단면을 통해 흐르는 유체의 총 운동량

$$\rho QV=\rho AV^2$$

미소유관을 통한 운동량

$$\rho dQu=\rho u^2 dA \quad \rightarrow \quad \rho\int_A u^2 dA$$

$$\beta\rho AV^2=\rho\int_A u^2 dA$$

$$\therefore \quad \beta=\frac{1}{A}\int_A\left(\frac{u}{V}\right)^2 dA$$

→ 일반적으로 α와 β는 1에 가까우므로 보통 1로 보아 생략함

<예제 3.17> 그림에서 원관 내에 물이 흐를 때 흐름이 층류면 포물선 유속분포를 보이며 중심에서 최대유속 $u_{\max}$가 발생된다. 유속분포식을 구한 후 평균유속과 최대유속의 관계를 구하고 에너지 보정계수 α를 계산하라.

(풀이) $u - u_{\max} = kr^2$

$u = 0$일 때 $r = a$이므로 $k = -\dfrac{u_{\max}}{a^2}$

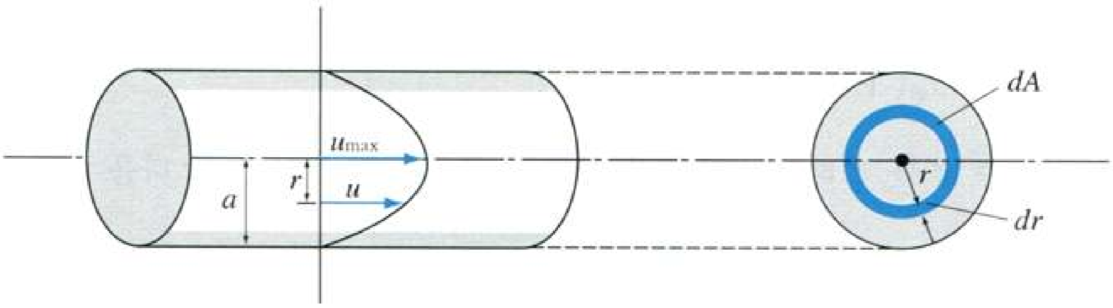
유속분포식 : $u = u_{\max}(1 - \dfrac{r^2}{a^2})$

$$\text{평균유속 : } V = \frac{Q}{A} = \frac{\int u dA}{\pi a^2} = \frac{\int u_{\max}(1 - \frac{r^2}{a^2}) 2\pi r dr}{\pi a^2} = \frac{2u_{\max}}{a^4}\int_0^a (a^2 r - r^3) dr = \frac{u_{\max} 2}{}$$

$$\text{에너지 보정계수 : } \alpha = \frac{1}{A}\int_A (\frac{u}{V})^3 dA = \frac{1}{\pi a^2}\int_0^a [\frac{u_{\max}(1 - \frac{r^2}{a^2})}{u_{\max}/2}]^3 2\pi r dr$$

$$= \frac{16}{a^2}\int_0^a (1 - \frac{r^2}{a^2})^3 r dr$$

$$= 2.00$$



<예제3.18> 예제 3.16과 동일한 조건에서 운동량보정계수 β를 구하라.

(풀이) $\beta = \dfrac{1}{A}\displaystyle\int_A (\frac{u}{V})^2 dA$

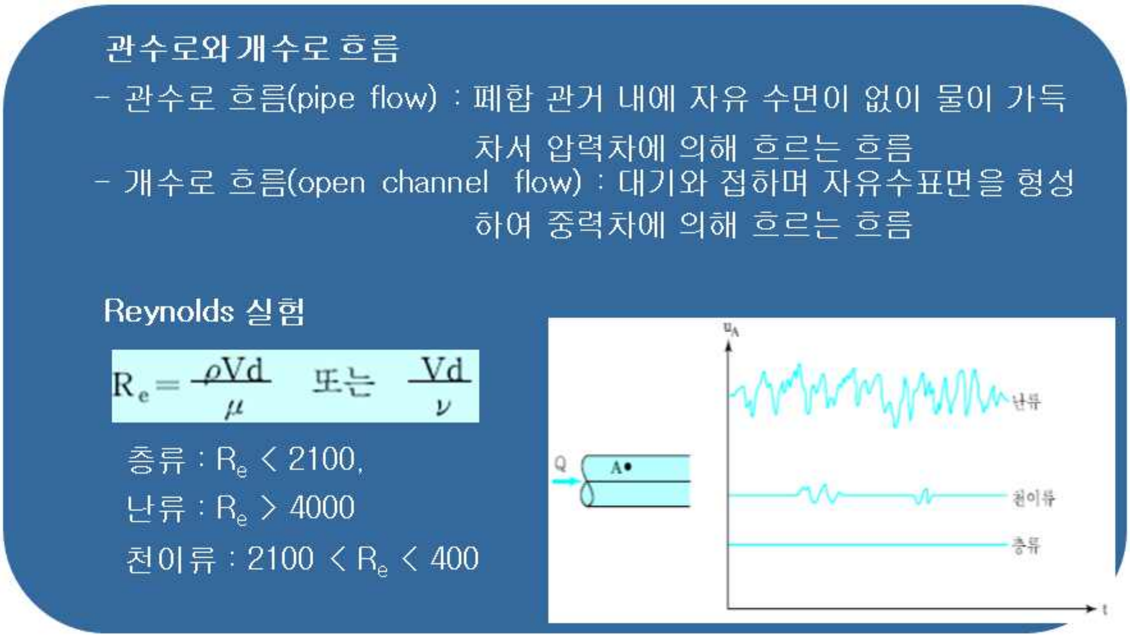
$$= \frac{1}{\pi a^2 V^2}\int_0^a [u_{\max}(1 - \frac{r^2}{a^2})]^2 2\pi r dr$$

$$= \frac{2\pi u_{\max}^{\ 2}}{\pi a^2 \cdot \frac{u_{\max}^{\ 2}}{4}}[\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{2a^2} + \frac{1}{6}\frac{r^6}{a^4}]_0^a$$

$$= \frac{8}{a^2} \cdot \frac{a^2}{6} = \frac{4}{3}$$

제4장 관수로 흐름(Pipe line flow)

4.1 관수로 흐름해석

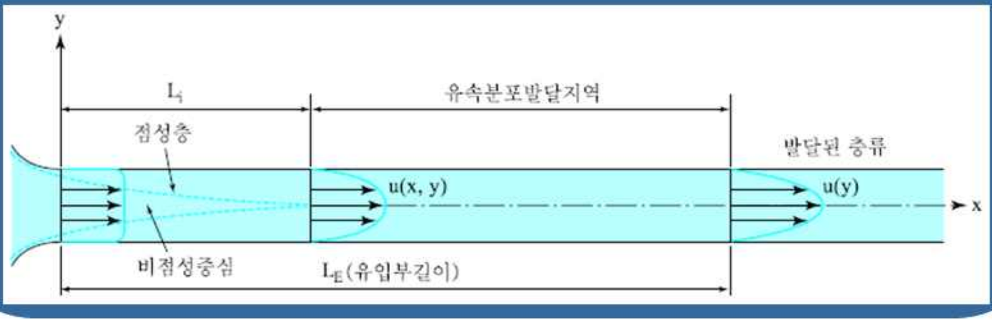


유입부 흐름과 발달된 흐름

- 유입부 흐름(entrance flow) : 흐름 방향으로 유속분포가 변하는 흐름
- 발달된 흐름(developed flow) : 유속분포가 더 이상 변하지 않는 흐름

층류의 유입길이 L_E

$$\frac{L_E}{D} = 0.065R_e$$

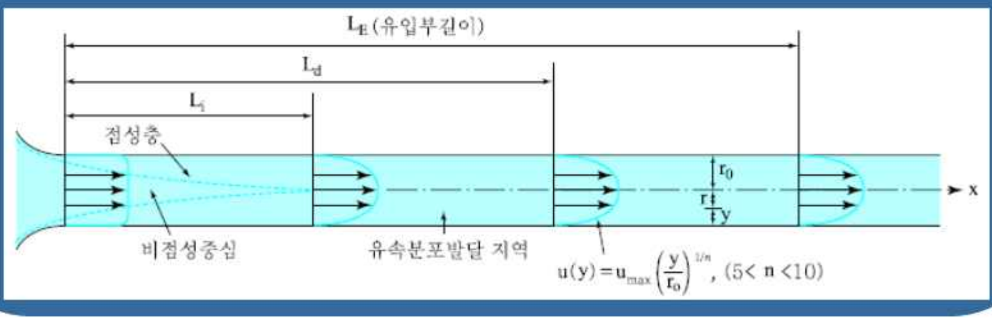


단면의 형상여하에 관계없이 유수(流水)가 관내를 충만하여 흐르는 수로
* 임의 주 지점의 압력차에 의하여 흐름

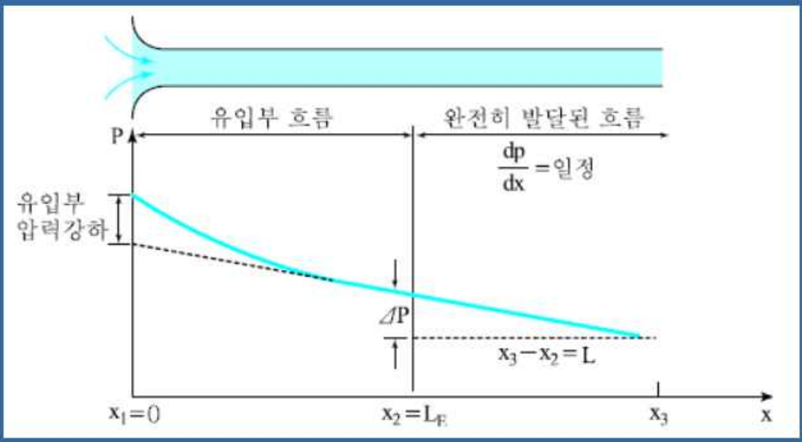
난류의 유입길이 L_E

- 비점성 중심길이 L_i : 벽면의 점성응력이 횡단면 전체를 지배하는 구간
- 유속분포발달지역 L_d : 유속분포가 안정화 되어가는 구간

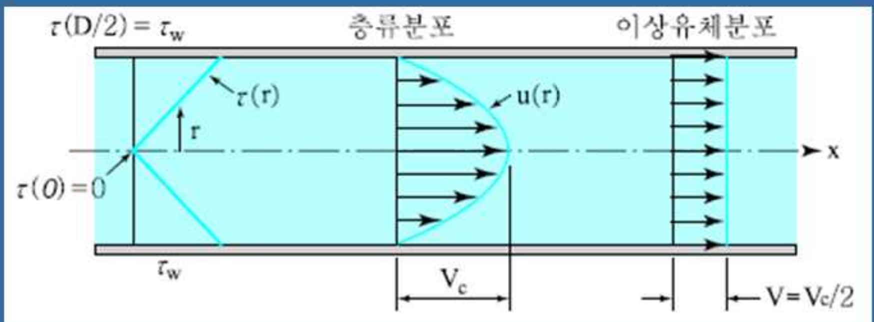
$$\frac{L_i}{D} \simeq 10, \qquad \frac{L_d}{D} \simeq 40, \qquad \frac{L_E}{D} \simeq 120$$



수평 관로를 따른 압력분포



마찰응력 및 유속분포



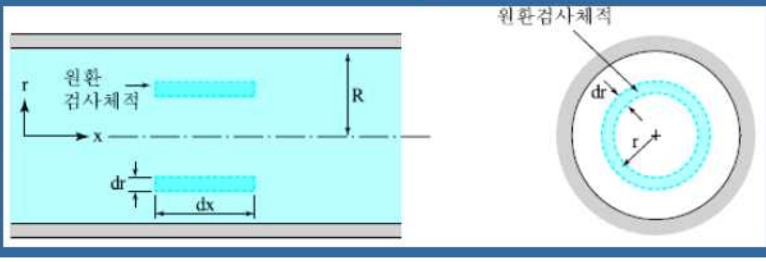
관수로를 통해 흐르는 유량

- Hagen-Poiseuille 법칙

$$Q = \int u\,dA = \int_{r=o}^{r=R} u(r)2\pi r\,dr = 2\pi V_c \int_0^R \left[1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right] r\,dr$$

또는 $Q = \dfrac{\pi R^2 V_c}{2}$

$$V = \frac{\pi R^2 V_c}{2\pi R^2} = \frac{V_c}{2} = \frac{\Delta p D^2}{32\mu l} \quad \rightarrow \quad Q = \frac{\pi D^4 \Delta p}{128\mu l}$$



1) 층류 흐름 해석

◦ Hazen - Poiseuille 법칙 유도

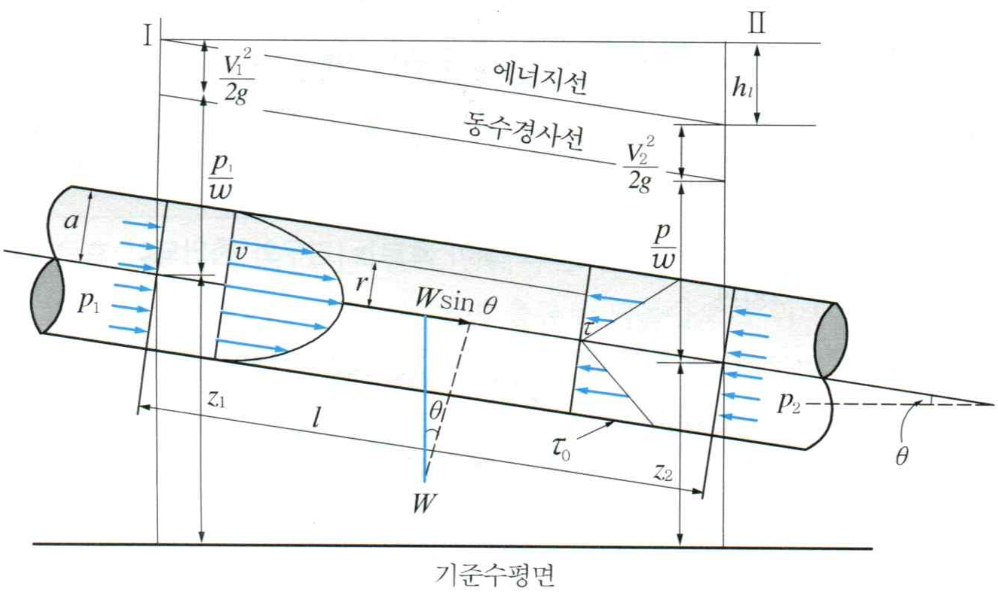


그림 4-3

그림에서 (I), (II) 단면 사이에 에너지 손실을 고려한 Bernoulli 정리를 적용하면

$$\frac{v_1^2}{2g}+\frac{p_1}{w}+z_1=\frac{v_2^2}{2g}+\frac{p_2}{w}+z_2+h_L$$

단면적이 일정하다면 v_1 = v_2가 같으므로

$$h_L=\frac{p_1}{w}-\frac{p_2}{w}+z_1-z_2 \quad \text{---} \ ①$$

그리고 관축에서 임의의 거리 r 지점의 유관을 생각하면

흐름방향 힘의 평행조건 $\sum F=ma=0$로부터

$p_1\pi r^2-p_2\pi r^2+W\sin\theta$ = $\tau 2\pi r l$

여기서 $W=\omega\pi r^2 l$

$$\sin\theta=\frac{1}{l}(z_1-z_2)$$

$$p_1\pi r^2-p_2\pi r^2+\omega\pi r^2 l\cdot\frac{1}{l}(Z_1-Z_2)=\tau 2\pi r l$$

양변을 $\omega_0\pi r$ 로 나누면

$$\frac{p_1}{\omega}r-\frac{p_2}{\omega}r+(z_1-z_2)r=\frac{2\tau l}{\omega}$$

$$r\left(\frac{p_1}{\omega}-\frac{p_2}{\omega}+z_1-z_2\right)=\frac{2\tau l}{\omega}$$

$$rh_L=\frac{2\tau l}{\omega}$$

$$\therefore \ \tau=\frac{\omega h_L}{2l}\cdot r$$

⑯ - $\tau=\frac{\omega h_L}{2l}\cdot r$

관벽(r=a)에서의 마찰력을 τ_0라 하면

⑯ $\tau_0=\frac{\omega h_L}{2l}\cdot a$

* 흐름의 상태에는 관계가 없으므로 층류, 난류 모두 성립된다.

<최대 유속 : v_{max}>

관축에서 r지점의 마찰저항력은 $\tau=\frac{\omega h_L}{2l}\cdot r$ --- ②이다.

그런데 Newton의 점성법칙에서 마찰저항력은 $\tau=-\mu\frac{dv}{dr}$ --- ③이므로

③식 = ②식이다.

$\frac{\omega h_l}{2l}\cdot r$ = $-\mu\frac{dv}{dr}$

$$dv=-\frac{\omega h_L}{2\mu l}\cdot rdr$$

적분하면

$$\int dv = \int -\frac{w_o h_L}{2\mu l} r dr$$

$$v = -\frac{\omega_0 h_L}{2\mu l} \cdot \frac{r^2}{2} + C = -\frac{\omega_0 h_L}{4\mu l} r^2 + C$$

그러나 관벽에서는 v = 0 이므로 0 = $-\frac{\omega_0 h_L}{4\mu l} a^2 + C$

$$\therefore \ C = \frac{\omega_0 h_L}{4\mu l} \cdot a^2$$

$$\therefore \ v = -\frac{\omega_0 h_L}{4\mu l} \cdot r^2 + \frac{\omega_0 h_L}{4\mu l} \cdot a^2$$

$$= \frac{\omega_0 h_L}{4\mu l} \cdot a^2 \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)$$

관측벽에서는 r = 0 이며 최대유속이 생기므로

⑰ - $v_{\max} = \frac{\omega_0 h_L}{4\mu l} \cdot a^2$

따라서 층류유속 분포식은 다음식과 같다.

$$\therefore \ v = v_{\max} \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)$$

<평균 유속 : V>

미소단면 dA(= 2πrdr)를 통과하는 유량을 dQ라 하면

dQ = $v \cdot dA$

$$= \frac{\omega_0 h_L}{4\mu l} \cdot (a^2 - r^2) \cdot 2\pi r dr$$

$$= \frac{\omega_0 \pi h_L}{2\mu l} \cdot (a^2 r - r^3) \cdot dr$$

이것을 전단면에 대하여 적분하면

Q = $\frac{\omega_0 \pi h_L}{2\mu l} \int_0^a (a^2 r - r^3) \cdot dr$

$$= \frac{\omega_0 \pi h_L}{2\mu l} \left[a^2 \frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right]_0^a$$

$$= \frac{\omega_0 \pi h_L}{2\mu l} \left(\frac{a^2}{2} - \frac{a^4}{4} \right)$$

$$= \frac{\omega_0 \pi h_L}{8\mu l} a^4$$

[Hazen - Poiseuille 법칙]

⑱ - Q = $\frac{\omega_0 \pi h_L}{8\mu l} a^4$ ※

관수로 속의 층류의 흐름에서 유량(Q)은 압력강하 ($\frac{h_L}{l}$)와 관의 반경(a)의 4승에 비례하고

점성계수(μ)에 반비례한다.
평균유속은 Hazen - Poiseuille의 법칙

Q = $\frac{\omega\pi h_L}{8\mu l}a^4$

연속방정식

Q = A · V

A=πa²로부터 $\pi a^2 V = \frac{\omega\pi h_L}{8\mu l}\cdot a^2$

⑲ - $V = \frac{wh_L}{8\mu l}\cdot a^2$ (층류 평균유속공식)

* 최대유속과 평균유속의 관계
  최대유속(v_{max})은 평균유속(V)의 2배이다.

$$v_{\max} = \frac{\omega h_L}{4\mu l}\cdot a^2$$

$$V = \frac{1}{2}\left(\frac{wh_L}{4\mu l}\cdot a^2\right)$$

$$V = \frac{1}{2}v_{\max}$$

<예제 4.1> 길이 10cm, 반지름 2mm의 관을 통하서 10분간 0.5m³의 물이 흐를 때 손실 수두는 4.3cm이 었다. 물의 동점성계수는 얼마인가?

(풀이) $Q = \frac{\pi a^4 \Delta p}{8\mu L}$

$$\Delta p = p_1 - p_2 = wh_L$$

$$Q = \frac{\pi a^4 wh_L}{8\mu L}$$

$$\mu = \frac{\pi wh_L}{8LQ}a^4$$

$$Q = \frac{0.5m^3}{10\times 60\sec} = \frac{0.5\times 100^3 cm^3}{600\sec} = 833.3cm^3/s$$

$$\mu = \frac{3.14\times 1\times 4.3\times 0.2^4}{8\times 10\times 833.3} = 20832g \cdot s/cm^2$$

<Darcy - Weisbach의 마찰손실 수두공식 유도>

평균유속 $V = \frac{\omega_0 h_L}{8\mu l}a^2$에서

$a = \frac{D}{2}$를 대입하면

$$V = \frac{\omega_0 h_L}{8\mu l}(\frac{D}{2})^2$$

$$= \frac{\rho g h_L D^2}{32\mu l}$$

$$h_L = \frac{32\mu l V}{\rho g D^2}$$

$$= \frac{64\mu}{\rho VD}\frac{l}{D}\frac{V^2}{2g}$$

그런데 $Re = \frac{VD}{v}$ $v = \frac{\mu}{\rho}$ $R_e = \frac{\rho VD}{\mu}$

⑳ - $h_L = \frac{64}{Re}\frac{l}{D}\frac{V^2}{2g} = f\frac{l}{D}\frac{V^2}{2g}$ (Darcy Weisbach 의 마찰손실 수두 공식) ※

f : 마찰손실계수 $f = \frac{64}{Re}$: 층류일 때

관수로 속의 층류흐름에서 마찰손실수두(h_L)는 유속수두($\frac{V^2}{2g}$)와 관장(l) 에 비례하고 관경(D)과 Reynolds(Re)에 역비례한다.

$$\tau_0 = \frac{\omega h_L}{2l} \cdot a$$

$$h_L = \tau_o \frac{2l}{aw}$$

$$h_L = f\frac{l}{D}\frac{V^2}{2g}$$

$$\tau_o \frac{4l}{D(\rho g)} = f\frac{l}{D}\frac{V^2}{2g}$$

$$\tau_o = \frac{f\rho V^2}{8}$$

관벽의 마찰력이 마찰손실계수 f,밀도 ρ와 평균속도 V의 관계로 표시되는 기초 방정식이므로 $\sqrt{\frac{\tau_o}{\rho}}$에 관해 정리하면 다음과 같다.

$$u_* = \sqrt{\frac{\tau_o}{\rho}} = V\sqrt{\frac{f}{8}}$$

여기서 u_*를 속도차원을 갖는 관벽의 마찰력을 나타내는 **마찰속도(friction velocity)**라 한다.

<예제 4.2> 안지름이 8cm의 원관에서 매분 0.4m^{3}의 기름을 수송하고 있다. 관의 길이 500m 사이에 손실수두를 구하라. 또 관축에서 3cm인 점에서의 전단응력과 유속을 계산하라. 단, ρ=898 kg/m^3, μ=0.0575N・s/m^2

(풀이) (1) 손실수두

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} = \frac{0.0575 kg \bullet m/s^2 \bullet s/m^2}{898\, kg/m^3} = 6.4 \times 10^{-5} m^2/s$$

$$V = \frac{Q}{A} = \frac{Q}{\frac{\pi D^2}{4}} = \frac{\frac{0.4}{60}}{\frac{3.14 \times 0.08^2}{4}} = 1.33 m/s$$

$$R_e = \frac{VD}{\nu} = \frac{1.33 \times 0.08}{6.4 \times 10^{-5}} = 1663 < 2000$$

$$f = \frac{64}{R_e} = \frac{64}{1663} = 0.038$$

$$h_L = f \frac{l}{d} \frac{V^2}{2g} = 0.038 \times \frac{500}{0.08} \times \frac{1.33^2}{2 \times 9.8} = 21.4\, m$$

(2) 전단응력

$$v_{\max} = 2V = 2.66\, m/s$$

$$v_3 = v_{\max}(1 - \frac{r^2}{a^2}) = 2.66(1 - \frac{0.03^2}{0.04^2}) = 1.16\, m/s$$

$$\tau = \frac{\omega h_L}{2l} \cdot r = \frac{\rho g h_L}{2l} r = \frac{898 \times 9.8 \times 21.4}{2 \times 500} \times 0.03 = 5.65 N/m^2$$

<예제 4.3> 지름 **15cm**의 원관 속을 **5m/s**의 속도로 흐를 때 관로 길이 **25m**를 흐르는 동안 에너지 손실 수두가 **4.8m**였다. 마찰속도를 구하라.

(풀이) $h_L = f \frac{l}{D} \frac{V^2}{2g}$

$$4.8 = f \frac{25}{0.15} \times \frac{5^2}{2 \times 9.8}$$

$$\therefore f = 0.023$$

$$U_* = \sqrt{\frac{f}{8}}\, V = \sqrt{\frac{0.023}{8}} \times 5 = 0.27 m/s$$

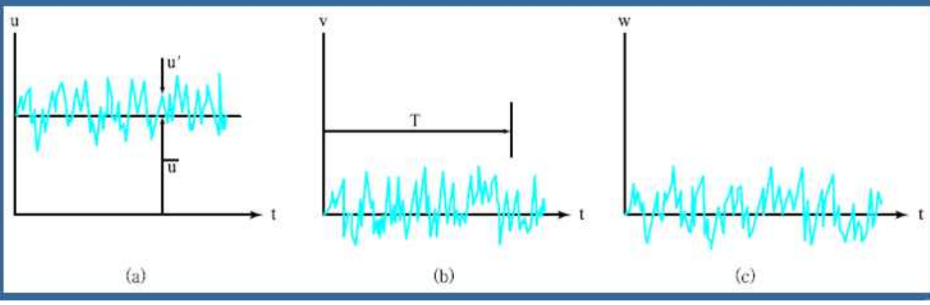
2) 난류 유속 분포

난류의 유속성분

$$u = \overline{u} + u', \qquad v = \overline{v} + v', \qquad w = \overline{w} + w'$$

x방향의 속도성분의 평균치

$$\overline{u} = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)\,dt$$



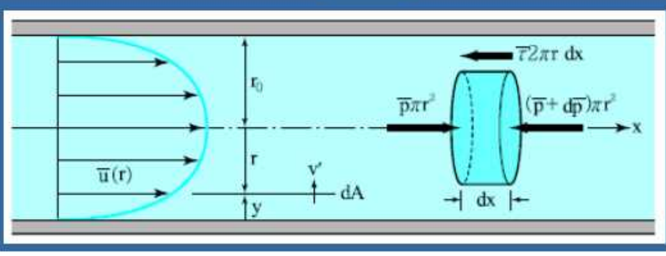
마찰응력

미소면적 dA를 통과하는 물 입자의 무작위 운동으로 인해 발생하는 x방향의 힘

$$dF = -\rho v' dA\, u' \quad \rightarrow \quad \tau_{turb} = -\rho \overline{u'v'}$$

- 총마찰응력

$$\tau = \tau_{lam} + \tau_{turb} = \mu \frac{d\overline{u}}{dy} - \rho \overline{u'v'}$$ 또는 $$\tau = \mu \frac{d\overline{u}}{dy} + \eta \frac{d\overline{u}}{dy} = (\mu + \eta)\frac{d\overline{u}}{dy}$$



마찰응력

- 혼합거리(mixing length) l_m

$$u' = l_m \frac{du}{dy} \qquad v' = l_m \frac{du}{dy}$$

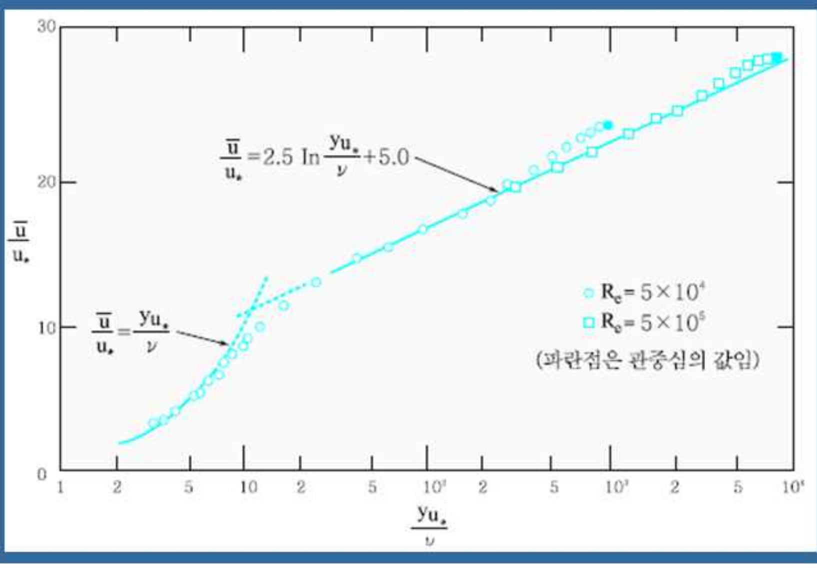
$$\tau_{turb} = \rho\, l_m^2 \left(\frac{d\overline{u}}{dy}\right)^2$$

von Karman의 혼합거리

$$l_m = \kappa \left(\frac{d\overline{u}}{dy} \Big/ \frac{d^2\overline{u}}{dy^2} \right)$$

$$\therefore \quad \tau_{turb} = \rho\kappa^2 \left(\frac{d\overline{u}}{dy}\right)^4 \Big/ \left(\frac{d^2\overline{u}}{dy^2}\right)^2$$ ← Prandtl-Karman 공식

유속분포



유속분포

- 층류저층에서는 평균유속분포

$$\frac{\bar{u}}{u_*} = \frac{yu_*}{\nu} \qquad \left(0 \le \frac{yu_*}{\nu} \le 5\right)$$

- 외층에서의 유속분포

$$\frac{\bar{u}}{u_*} = 2.5 \ln \frac{yu_*}{\nu} + 5.0 \qquad \left(30 < \frac{yu_*}{\nu},\ \frac{y}{R} < 0.15\right)$$

4.2 관수로 평균 유속공식

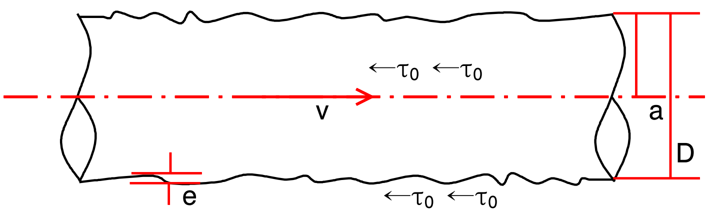
1) 마찰손실 수두

＊Nikuradse 의 실험과 마찰손실계수

단면이 일정한 원관 속의 흐름에서 마찰손실수두는 층류, 난류 모두 $h_L = f\frac{l}{D}\frac{V^2}{2g}$

층류의 흐름에서는 벽면의 상태와 상관없이 마찰손실계수는 $f = \frac{64}{Re}$ 이다.

그러나 Nikuradse의 실험결과에 따르면 마찰손실계수 f는 Reynolds수뿐만 아니라 벽면의 조도(粗度 : roughness) : e에 관계가 있다.



그림에서 마찰 저항력 $\tau_0 = \frac{\omega_0 h_L}{2l} a$에서

$a = \dfrac{D}{2}$ 를 대입하면 $\tau_0 = \dfrac{\rho g h_L}{2l}\dfrac{d}{2} = \dfrac{\rho g h_L D}{4l}$

$\therefore\ h_L = \dfrac{4l\tau_0}{\rho g D}$

이것은 Darcy Weisbach 이 마찰손실수두 $h_L = f \cdot \dfrac{l}{D} \cdot \dfrac{V^2}{2g}$ 과 같다.

$\dfrac{4l\tau_0}{\rho g D} \cdot = f \cdot \dfrac{l}{D} \cdot \dfrac{V^2}{2g}$

$\therefore\ \tau_0 = \dfrac{\rho f V^2}{8}$

마찰속도 $U_* = \sqrt{\dfrac{\tau_o}{\rho}} = \sqrt{\dfrac{f}{8}}\, V$

관벽 마찰응력 $\tau_0 = \Phi(\mu \cdot \rho \cdot v \cdot D \cdot e)$

또 차원해석법에서 마찰손실계수 $f = \Phi'\left(\dfrac{1}{Re}, \dfrac{e}{D}\right)$

$\dfrac{e}{D}$: 상대조도(relative roughness)

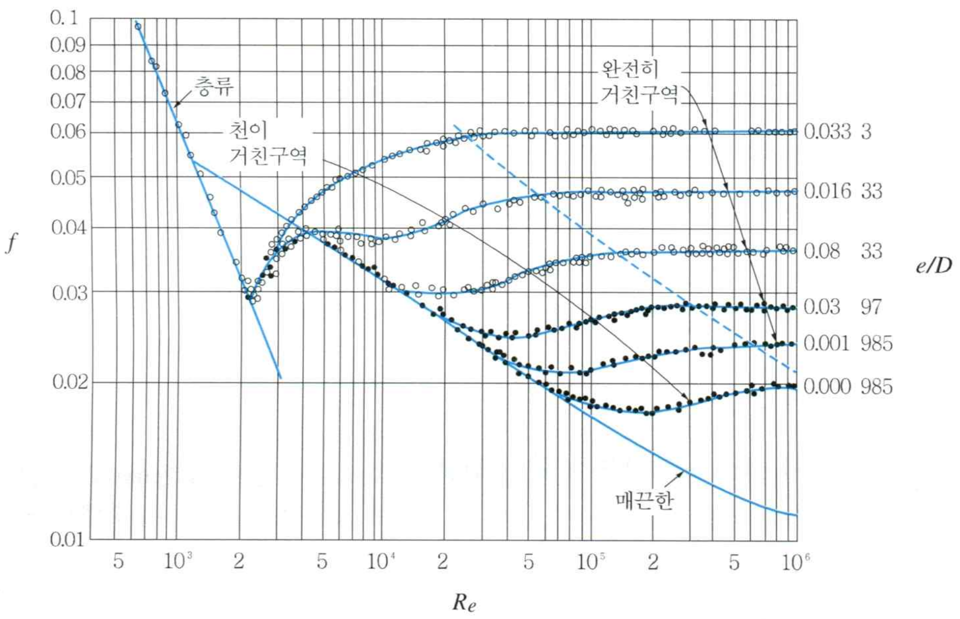


그림 4-4

* 상대조도가 작은 관 즉 매끄러운 관에서는 마찰손실계수 f는 Reynolds수(Re)의 함수이다.

층류($R_e < 2000$)일 때 $f = \dfrac{64}{Re}$

난류($3{,}000 < R_e < 10^5$)일 때

활관(매끄러운 관): $f = 0.3164 R_e^{-1/4}$ (Blasius공식)

조관(거친 관) : $\frac{1}{\sqrt{f}} = 1.74 + 2.03\log\frac{1}{2}/(\frac{e}{D})$ (Nikuradse 공식)

$f = \frac{124.6n^2}{D^{1/3}}$ (Manning공식)

Moody 도표

층류에서의 압력강하와 유속간의 관계

$$V = \frac{\pi R^2 V_c}{2\pi R^2} = \frac{V_c}{2} = \frac{\Delta p d^2}{32\mu L}$$

$$h_L = \frac{32\mu L V}{w\, d^2} = \frac{64\mu}{\rho V d}\frac{L}{d}\frac{V^2}{2g} = f\frac{L}{d}\frac{V^2}{2g} \rightarrow \boxed{f = \frac{64}{R_e}}$$

매끈한 관 : $\frac{1}{f^{0.5}} = 0.86 \ln R_e f^{0.5} - 0.8$

완전난류영역 : $\frac{1}{f^{0.5}} = -0.86 \ln \frac{\varepsilon}{3.7d}$

천이영역 : $\frac{1}{f^{0.5}} = -0.86 \ln\left(\frac{\varepsilon}{3.7d} + \frac{2.51}{R_e f^{0.5}}\right)$

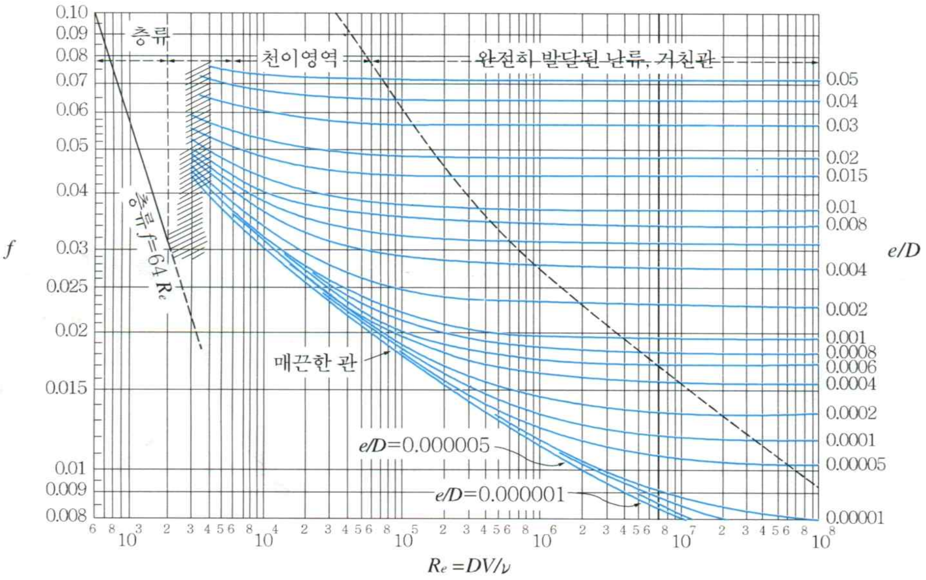


그림 4-5

<예제 4.4> 직경이 2.5cm인 매끈한 관에 22cm/sec의 속도로 물이 흐른다, 동점성계수가 $\nu=0.011cm^2/\sec$라면 마찰손실계수는 얼마인가? 또 마찰속도 u_*는 얼마나 되나?

(풀이) $R_e=\dfrac{VD}{\nu}=\dfrac{22\times2.5}{0.011}=5{,}000$

Blasius공식으로부터

$$f=0.3164R_e^{-1/4}=0.3164(5000)^{-1/4}=0.0377$$

$$u_*=V\sqrt{\frac{f}{8}}=22\sqrt{\frac{0.0377}{8}}=1.51cm/\sec$$

<예제 4.5> 2m/sec의 평균유속으로 물이 직경 15cm의 아연 도금철로 된 길이 700m의 관을 통해 운반된다. 이 때 발생되는 손실수두 h_L과 강하된 압력 Δp를 계산하라. 단 $\nu=0.011cm^2/\sec$이다.

(풀이) $R_e=\dfrac{200\times15}{0.011}=2.73\times10^5$

$e=0.015cm$ (표 4-1)

$\dfrac{e}{D}=\dfrac{0.015}{15}=0.001,\ f=0.02$ (그림 4-6)

$$h_L = f\frac{l}{D}\frac{V^2}{2g} = 0.02 \times \frac{700}{0.15} \times \frac{2^2}{2 \times 9.8} = 19m$$
$$\Delta p = wh_L = 1000 \times 19 = 19{,}000 kg/m^2 = 1.9 kg/cm^2$$

2) 관수로 평균유속 경험공식

관수로내의 평균유속은 관마찰과 밀접한 연관성을 갖고 있으며 경험식은 마찰을 표시하는 계수를 포함하고 있다.

원관내 층류의 유속분포식은 다음식과 같다.

$$v = v_{\max}(1 - \frac{r^2}{a^2}) \text{ , } \quad \text{관계수 } \frac{V}{v_{\max}} = 0.5$$

그리고 원관내 난류의 유속분포식은 Karman과 Prandtl은 다음식을 제안했다.

$$v = v_{\max}(\frac{y}{a})^m \text{ , } \quad \text{관계수 } \frac{V}{v_{\max}} = \phi(R_e, \frac{e}{D}) \text{ (그림 } 4-8\text{참고)}$$

매끈한 관 $m = 1/7,\ R_e < 10^5$

거친관 $m = 1/5,\ R_e < 10^5$

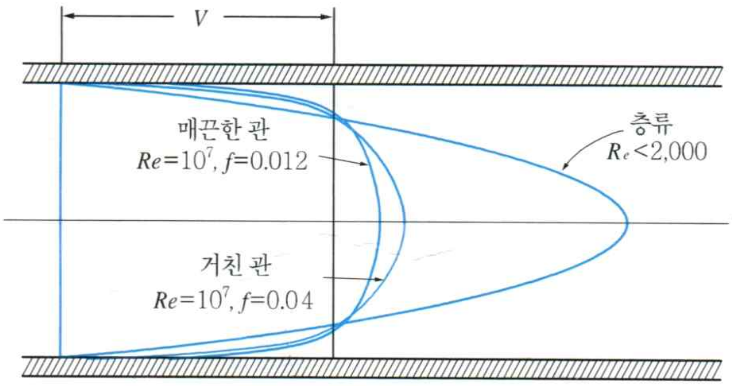


그림 4-7 동일 유량에 대한 속도분포

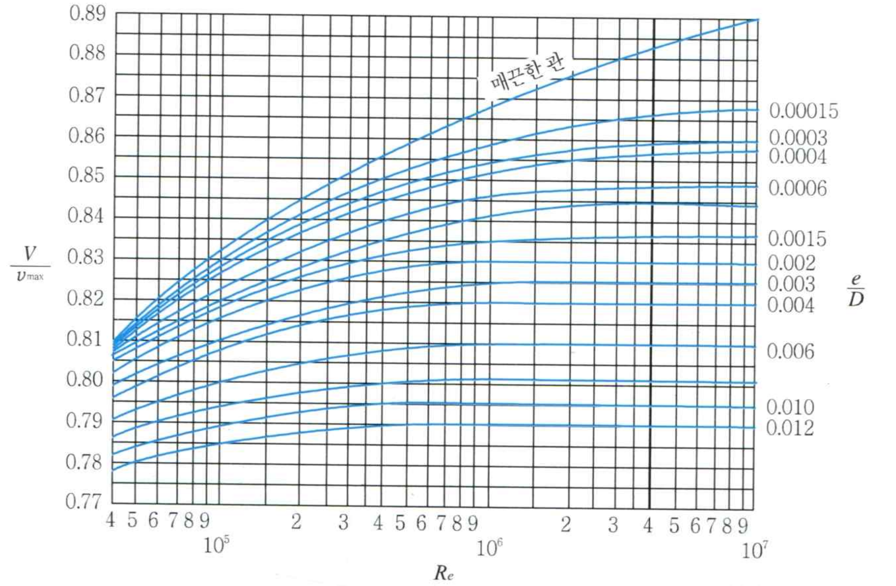


그림 4-8

<예제 4.6> 직경이 5cm 인 관의 흐름에서 $v_{\max} = 52cm/\sec$일 때 관벽에서 1cm 떨어진 지점의 유속은 얼마인가? 단, 동점성계수 $\nu = 0.012cm^2/\sec$이다.

(풀이) $\frac{v_{\max}}{2} < V < v_{\max}$

$$R_{e1} = \frac{26 \times 5}{0.012} = 10,833$$

$$R_{e2} = \frac{52 \times 5}{0.012} = 21,666$$

$$R_{e1} < R_e < R_{e2} \quad \therefore R_e < 10^5$$

$$v = v_{\max}(\frac{y}{a})^{1/7}$$

$$v_1 = 52(\frac{1}{2.5})^{1/7} = 45.6cm/\sec$$

[1] Chezy의 평균유속공식

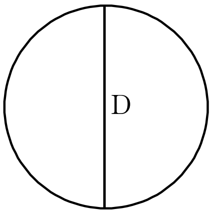
Darcy - Weisbach의 마찰손실수두 공식

$h_L = f \cdot \frac{l}{d} \cdot \frac{V^2}{2g}$ 에서

$$V = \sqrt{\frac{2gDh_L}{fl}}$$

$$= \sqrt{\frac{2g}{f} \cdot D \cdot \frac{h_L}{l}} \text{ --- ①}$$

* 경심 : R



경심 $R=\frac{A}{P}$ P : 윤변(wetted perimeter)

A : 유수 단면적

경심 $R=\frac{A}{P}$ = $\frac{\frac{\pi D^2}{4}}{\pi D}$ = $\frac{D}{4}$ $D=4R$

이것을 ①식에 대입하면

$$V=\sqrt{\frac{2g}{f}\cdot D\cdot\frac{h_L}{l}}$$

$$=\sqrt{\frac{2g}{f}\cdot 4R\cdot I}$$

$$=\sqrt{\frac{8g}{f}}\cdot\sqrt{RI}$$

= $C\sqrt{RI}$: Chezy 의 평균유속

여기서, $C=\sqrt{\frac{8g}{f}}$ --- ②

㉑ - Chezy의 평균유속공식 : $V=C\sqrt{RI}$ (m/sec), 지수형 : $V=C'R^nI^n$

[2] Manning의 평균유속공식

㉒ - $V=\frac{1}{n}R^{2/3}I^{1/2}$ (m/sec)

여기서, n은 Manning의 조도계수

C와 n의 관계는

$$C\sqrt{RI}=\frac{1}{n}R^{2//3}I^{1/2}$$

$$C=\frac{1}{n}R^{1/6}$$ --- ③

f와 n의 관계는

$$\sqrt{\frac{8g}{f}}=\frac{1}{n}R^{1/6} \qquad R=\frac{D}{4}$$

$$=\frac{1}{n}\left(\frac{D}{4}\right)^{1/6}$$

양변을 제곱하면

$$\frac{8g}{f} = \frac{1}{n^2}\left(\frac{D}{4}\right)^{1/3} = \frac{1}{n^2}\frac{D^{1/3}}{4^{1/3}}$$

$$f = \frac{124.6n^2}{D^{1/3}}$$

이식은 Manning의 마찰손실 계수공식으로 난류의 조관에 적합하다.

표 4-2 조도계수 n값

재 료	n	재 료	n
염화비닐관(신품)	0.009~0.012	연철관	0.012~0.014
놋쇠관, 유리관	0.01~0.012	도금한 연철관	0.013~0.015
용접, 강관	0.01~0.013	콘크리트관(활면)	0.012~0.013
칠한 주철관	0.01~0.013	콘크리트(조면)	0.014~0.016
주철관(신품)	0.012~0.014	흄관	0.011~0.014
주철관(古)	0.014~0.018		

[3] Hazen-Williams의 평균유속공식

$$V = 0.84935\,CR^{0.63}I^{0.54}\ (m/\sec)$$

$$f = \frac{98.78}{D^{0.167}C^{1.87}V^{0.15}}$$

표 4-3 Hazen-Williams공식의 C의 값

재 료	C
보통 콜타르칠한 주철관, 신품	130~135
보통 콜타르칠한 주철관, 통수 5년	120
보통 콜타르칠한 주철관, 통수 10년	110
보통 콜타르칠한 주철관, 통수 15년	105
보통 콜타르칠한 주철관, 통수 20년	95
보통 콜타르칠한 주철관, 통수 30년	85
보통 콜타르칠한 주철관, 통수 40년	80
보통 주철관, 고	100
놋쇠 및 유리관	140~150
내면 고무칠한 소화용 호스	110~140
흄 관(100~600mm 지름)	150~
흄 관(100mm 이하)	120~140
보통 콘크리트관	120~140

<예제 4.7> 철관의 내경이 300mm, I=5/1000인 경우 유속은 얼마 인가? Manning 및 Hazen- William공식으로 계산하라. 그리고 마찰손실계수 f도 구하라.

(풀이) (1) Manning 공식

조도계수 표로부터 철관인 경우 n=0.012

$$R=\frac{D}{4}=\frac{0.3}{4}=0.075\,m,\ I=\frac{5}{1000}=0.005$$

$$V=\frac{1}{n}R^{2/3}I^{1/2}=\frac{1}{0.012}\times 0.075^{2/3}\times 0.005^{1/2}=1.05\,m/s$$

(2) H-W 공식

유속계수 표로부터 철관인 경우 C=135

$$V=0.84935\,CR^{0.63}I^{0.54}=0.84935\times 135\times 0.075^{0.63}\times 0.005^{0.54}=1.285\,m/s$$

(3) 마찰손실 계수

$$f=\frac{124.6n^2}{D^{1/3}}=\frac{124.6\times 0.012^2}{0.3^{1/3}}=0.0269$$

<예제 4.8> 직경 600mm인 수평으로 설치된 신품 주철관 1km에 425l/sec의 물이 흐를 때 Hazen-Williams공식을 사용하여 마찰손실 수두를 구하라.

풀이) $A=\frac{\pi D^2}{4}=\frac{3.14\times 0.6}{4}=0.283m^2$

$$V=\frac{Q}{A}=\frac{0.425}{0.283}=1.5m/\mathrm{sec}$$

$$R = \frac{D}{4} = \frac{0.6}{4} = 0.15m$$

$$C = 130 \ (\text{표}4-4)$$

$$I = \frac{h_L}{l} = \frac{h_L}{1000}$$

$V = 0.84935\,CR^{0.63}I^{0.54}$로부터

$$1.5 = 0.84935 \times 130 \times (0.15)^{0.63}(\frac{h_L}{1000})^{0.54}$$

$$\therefore h_L = 3.19m$$

<예제 4.9> 직경 2m, 동수경사 $I = \frac{1}{900}$인 매우 낡은 주철관의 평균유속 및 유량을 Manning공식으로 구하라.

(풀이) $n = 0.018 \ (\text{표}4-2)$

$$R = \frac{D}{4} = \frac{2}{4} = 0.5m$$

$$V = \frac{1}{n}R^{2/3}I^{1/2} = \frac{1}{0.018} \times 0.5^{2/3} \times (\frac{1}{900})^{1/2} = 1.17m/\sec$$

$$A = \frac{\pi D^2}{4} = \frac{3.14 \times 2^2}{4} = 3.14m^2$$

$$Q = A\,V = 3.14 \times 1.17 = 3.67m^3/\sec$$

<예제 4.10> 직경이 100mm인 신품 염화비닐(PVC)관에 유량 0.02$m^3/\sec$의 물이 흐를 때 길이 500m 사이의 마찰손실 수두를 구하라.

(풀이) $n = 0.011 \ (\text{표}4-2)$

$$A = \frac{\pi D^2}{4} = \frac{3.14 \times 0.1^2}{4} = 0.00785m^2$$

$$V = \frac{Q}{A} = \frac{0.02}{0.00785} = 2.55m/\sec$$

$$f = \frac{124.6n^2}{D^{1/3}} = \frac{124.6 \times 0.011^2}{(0.1)^{1/3}} = 0.0325$$

$$h_L = f\frac{l}{D}\frac{V^2}{2g} = 0.0325 \times \frac{500}{0.1} \times \frac{2.55^2}{2 \times 9.8} = 53.9m$$

4.3 관수로 미소손실 수두

총손실수두 = 마찰 손실 + 미소손실

<미소 손실수두>

마찰이외의 손실

유체의 흐름의 단면이 변하거나 방향이 변하면 유선이 흐트러져 에너지 손실을 가져오게 된다. 이 때 에너지 손실은 마찰에 의한 것과는 달리 단지 유속에 의하여 생기므로 $\frac{V^2}{2g}$의 일부라 생각하며 즉 손실수두는 유속수두에 비례한다고 생각하여 다음식으로 나타낸다.

$$h_n = f_n \frac{v^2}{2g}$$

여기서 f_n은 소손실계수이며 다음의 단면변화와 흐름방향변화에 따라 결정된다.

① 단면이 변하는 곳

② 만곡부

③ 기타부속물(valve 등)

(1) 입구손실수두

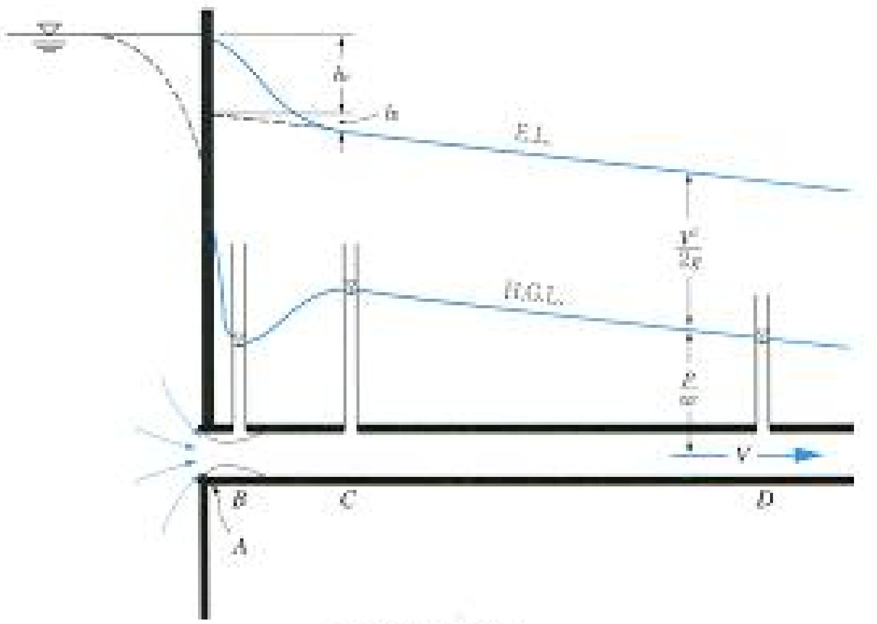


그림 4-11 유입손실

$$h_e = f_e \frac{V^2}{2g}$$

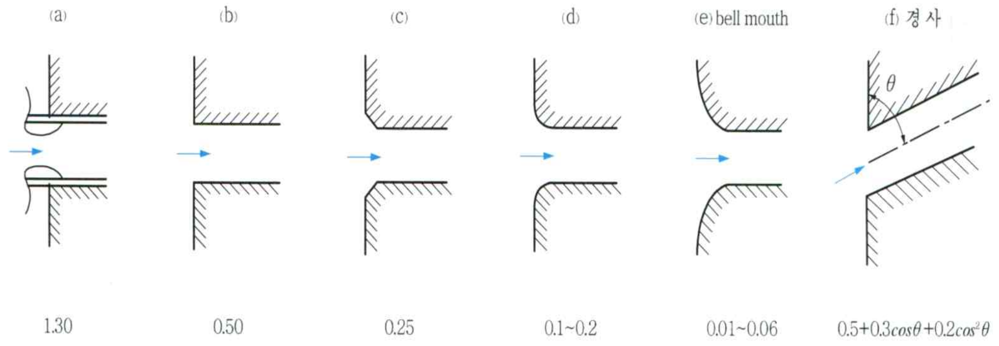


그림 4-12 유입손실계수

여기서 f_e는 유입손실계수로 입구형상에 따라 다르다. 보통 $f_e = 0.5$를 사용한다.

(2) 출구손실수두

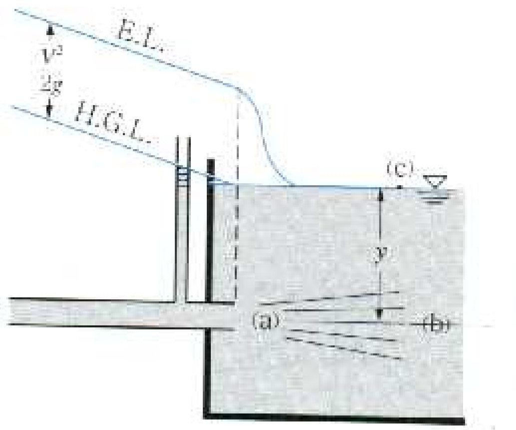


그림 4-13 출구손실

$$h_o = f_o \frac{V^2}{2g}$$

출구손실계수 $f_o = 1.0$이다.

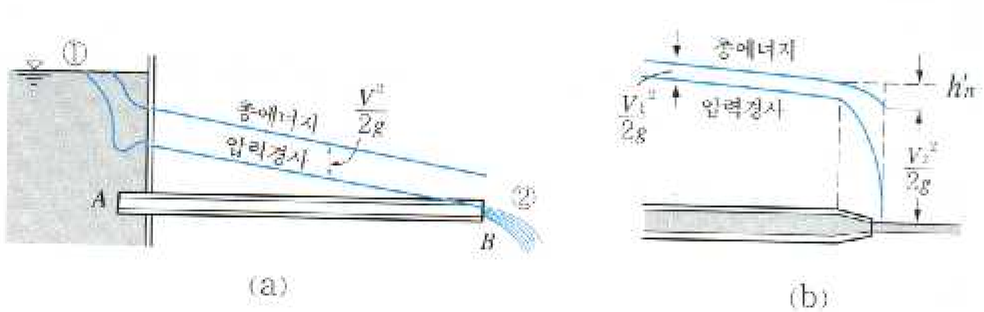


그림 4-14

(3) 단면 급확대 및 급축소손실수두

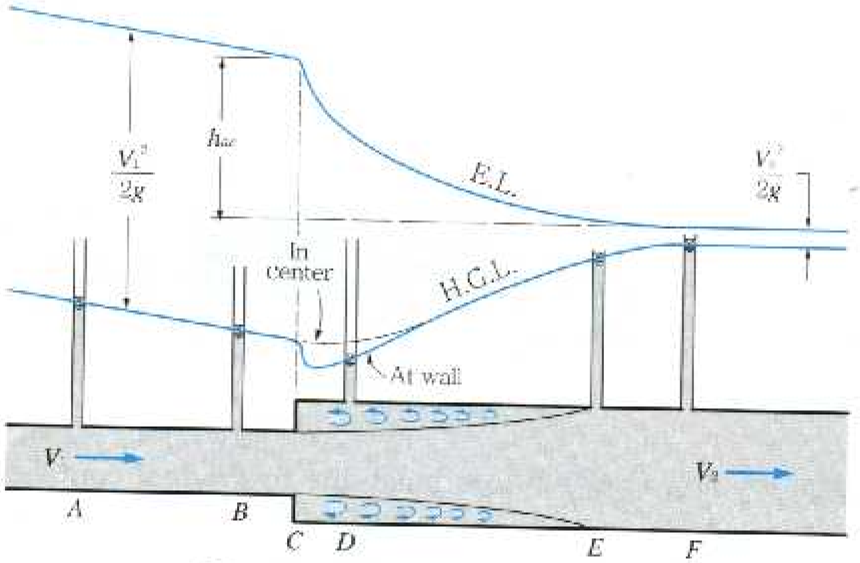


그림 4-20 단면 급확대에 의한 손실수두

$$h_{ae} = f_{ac}\frac{V_1^2}{2g}$$

$$f_{ac} = (1 - \frac{A_1}{A_2})^2$$

단면급확대손실

연속방정식 : $A_1V_1 = A_2V_2 = A_3V_3$

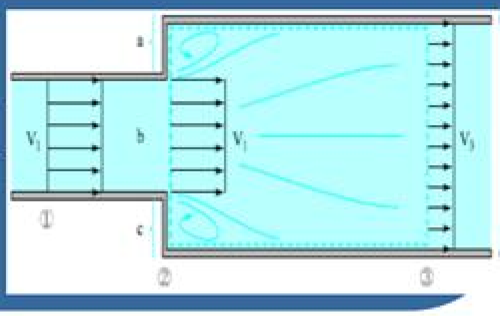
운동량방정식 : $p_1A_3 - p_3A_3 = \rho A_3V_3(V_3 - V_1)$

에너지방정식 : $\frac{p_1}{w} + \frac{V_1^2}{2g} = \frac{p_3}{w} + \frac{V_3^2}{2g} + h_m$

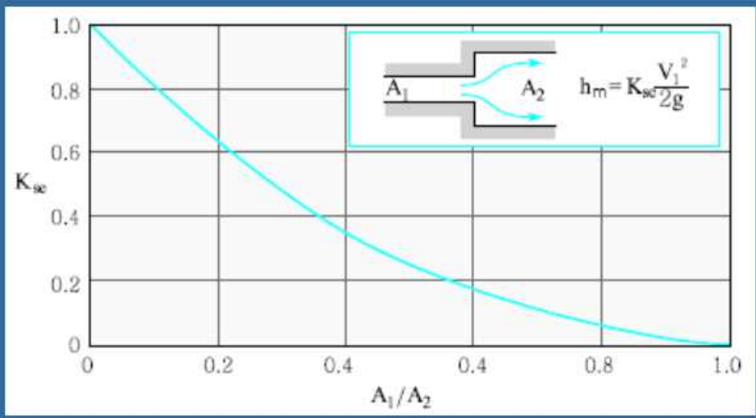
$$\frac{V_3(V_3 - V_1)}{g} = \frac{V_3^2 - V_1^2}{2g} + h_m$$

$$h_m = \frac{(V_3 - V_1)^2}{2g} = \left(1 - \frac{A_1}{A_2}\right)^2 \frac{V_1^2}{2g}$$

$$\rightarrow \quad K_{se} = \left(1 - \frac{A_1}{A_2}\right)^2$$



단면급확대손실



<예제 4.11> 그림 4-21과 같이 단면이 급확대된 관로가 있다. 작은 관로부터 평균유속 $6m/\sec$로 운반될 때 발생되는 총손실마인가? 단, 관로 ①에서의 마찰손실계수 f_1은 0.017이며, 관로 ②에서의 마찰손실계수 f_2는 0.0142이다.

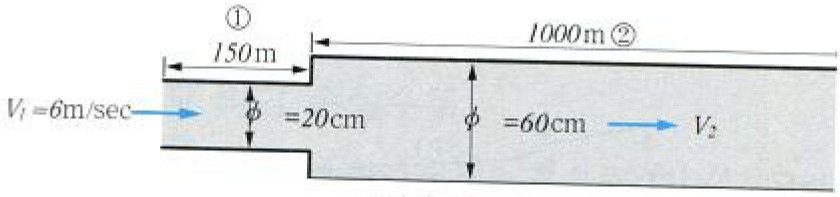


그림 4-21

(풀이) $h_{L1} = f_1 \frac{l_1}{D_1}\frac{V_1^2}{2g} = 0.017 \times \frac{150}{0.2} \times \frac{6^2}{2 \times 9.8} = 23.4m$

$Q = A_1 V_1 = A_2 V_2$로부터

$$V_2 = V_1 \frac{A_1}{A_2} = V_1 (\frac{D_1}{D_2})^2 = 6 \times (\frac{0.2}{0.6})^2 = 0.67m/\sec$$

$$h_{L2} = f_2 \frac{l_2}{D_2}\frac{V_2^2}{2g} = 0.0142 \times \frac{1000}{0.6} \times \frac{0.67^2}{2 \times 9.8} = 0.54m$$

$f_e = 0.5$

$$f_{ae} = (1 - \frac{A_1}{A_2})^2 = [1 - (\frac{D_1}{D_2})^2]^2 = [1 - (\frac{0.2}{0.6})^2]^2 = 0.79$$

$f_o = 1.0$

$$h_e = f_e \frac{V_1^2}{2g} = 0.5 \times \frac{6^2}{2 \times 9.8} = 0.92m$$

$$h_{ae} = f_{ae}\frac{V_1^2}{2g} = 0.79 \times \frac{6^2}{2 \times 9.8} = 1.45m$$

$$h_o = f_o\frac{V_1^2}{2g} = 1.0 \times \frac{0.67^2}{2 \times 9.8} = 0.22m$$

$$\begin{aligned} H = \sum h_n &= h_e + h_{L1} + h_{ae} + h_{L2} + h_o \\ &= 0.92 + 23.4 + 1.45 + 0.54 + 0.22 = 26.53m \end{aligned}$$

단면급축소손실

$$h_m = \frac{(V_c - V_2)^2}{2g} = \left(\frac{V_c}{V} - 1\right)^2 \frac{V_2^2}{2g}$$

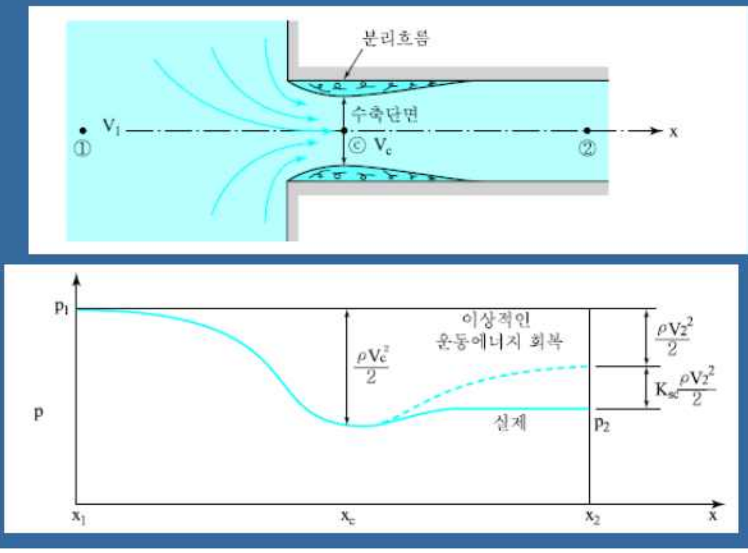
$$h_m = \left(\frac{A_2}{A_c} - 1\right)^2 \frac{V_2^2}{2g} = \left(\frac{1}{C_c} - 1\right)^2 \frac{V_2^2}{2g}$$

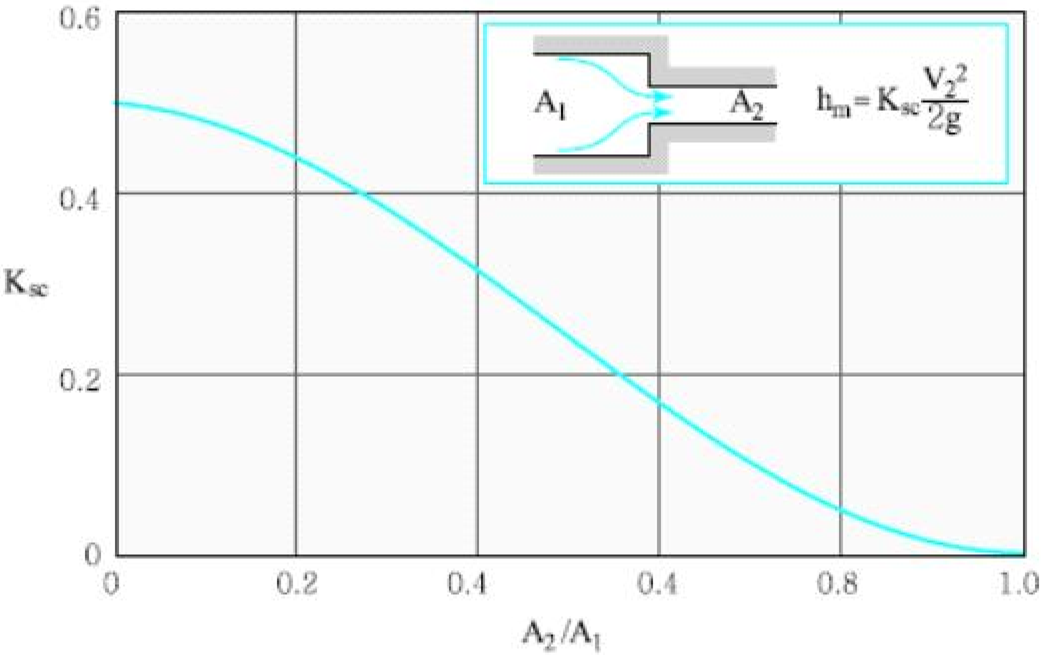
$$\rightarrow \quad K_{sc} = \left(\frac{1}{C_c} - 1\right)^2$$

단면수축계수 $C_c = A_c / A_2$

$$C_c = 0.62 + 0.38\left(\frac{A_2}{A_1}\right)^3$$

단면급축소손실


분리흐름
수축단면
V_1
①
ⓒ V_c
②
x
p_1
p
이상적인
운동에너지 회복
$\frac{\rho V_c^2}{2}$
$\frac{\rho V_2^2}{2}$
$K_{sc}\frac{\rho V_2^2}{2}$
실제
p_2
x_1
x_c
x_2
x


0.6
0.4
K_{sc}
0.2
0
0
0.2
0.4
0.4
0.8
1.0
A_2/A_1
A_1
A_2
$h_m = K_{sc}\frac{V_2^2}{2g}$

(4) 만곡부 손실수두

만곡부손실

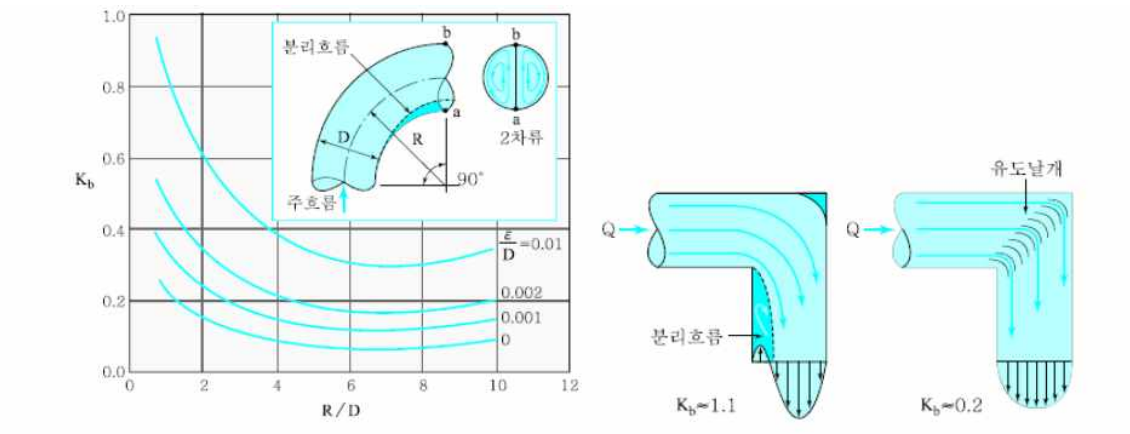
$$h_m = K_b \frac{V^2}{2g}$$

- 만곡관

$$K_L = \left[0.131 + 1.847\left(\frac{r}{R}\right)^{3.5}\right]\frac{\theta}{90}, \qquad 1 < \frac{R}{r} < 5, \qquad 0^\circ < \theta < 90^\circ$$

- 굴절관

$$K_b = 0.946 \sin^2\frac{\theta}{2} + 2.05 \sin^4\frac{\theta}{2}$$



$$h_{ab} = f_{ab}\frac{V^2}{2g}$$

$$f_{ab} = \left(\frac{a}{a_o} - 1\right)^2$$

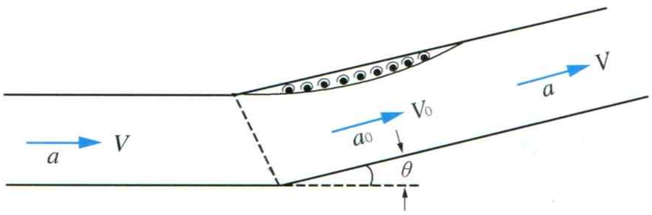


그림 4-15

표 4-5 굴절손실계수 f_{ab}의 값

θ° / 실험자	15	30	45	60	90	120	140
Weisbach(원형관)	0.0222	0.0725	0.183	0.365	0.99	1.86	2.43
Gibson (矩形管)	0.0240	0.111	0.263	0.492	1.22		

(5) 점확대 및 점축소

$$h_{ge} = f_{ge}\frac{V_1^2}{2g}$$

$$f_{ge} = (1-\frac{A_1}{A_2})^2$$

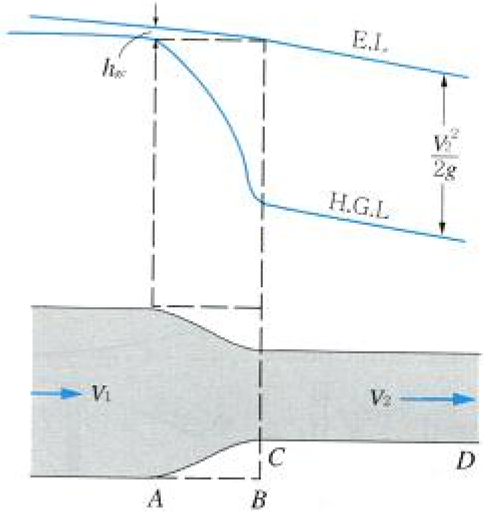


그림 4-18

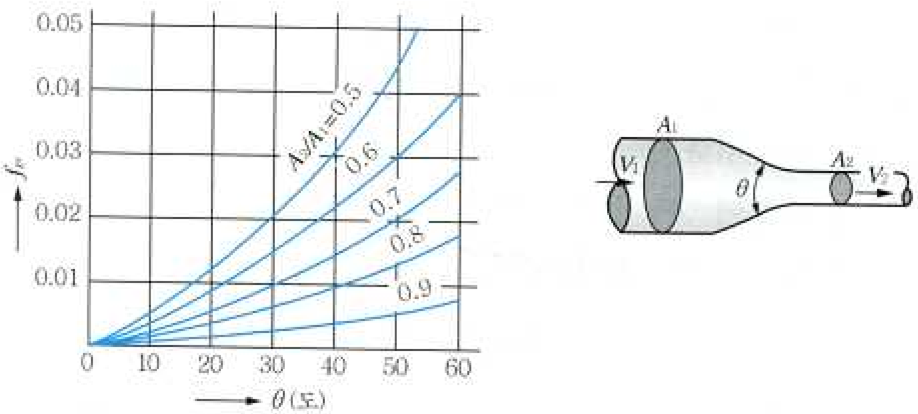


그림 4-19 단면 점축소에 의한 손실수두

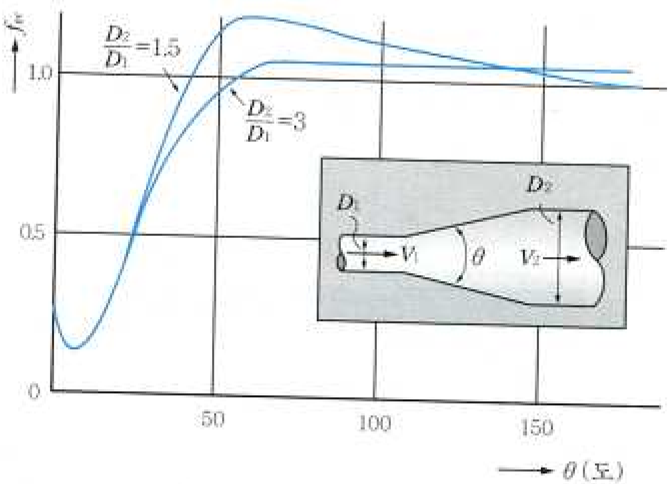


그림 4-23 단면 점확대 손실계수

(6) 밸브등 부속품에 의한 손실수두

$$h_v = f_v \frac{V^2}{2g}$$

여기서 f_v는 밸브와 같은 관부속품에 의한 손실계수로 부품의 종류와 개방도에 따라 다르다.

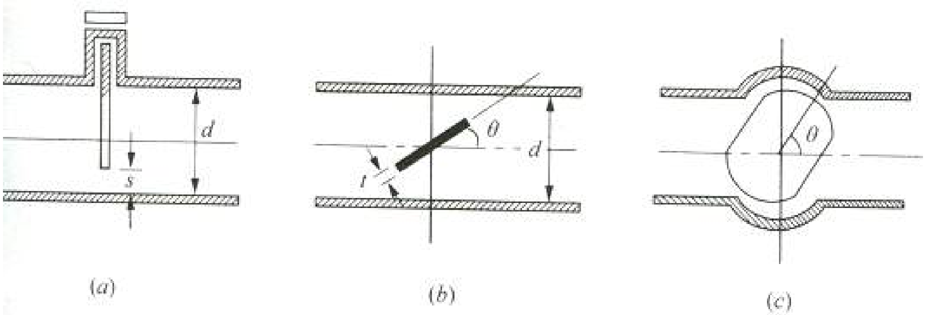


그림 4.10 (a) 제수밸브, (b) 나비형 밸브, (c) 코크

표 4-7 밸브와 부속품에 의한 손실계수

부속품 또는 밸브	f_v
표준 45° 엘보우	0.35
표준 90° 엘보우	0.75
긴반경 90° 엘보우	0.45
커플링	0.04
유니온	0.04
게이트밸브 Open	0.20
3/4 Open	0.90
1/2 Open	4.50
1/4 Open	24.00
구형(球形)밸브 Open	6.40
1/2 Open	9.50
Tee(분기관)	1.50

<예제 4.12> 그림과 같은 길이 1200m 직경 3200mm의 원형 철근 콘크리트 압력턴널에 $18m^3/\sec$의 물이 흐를 때 손실수두를 구하라. 단, 도중에 만곡부가 1개소 있으며 $f_{cb} = 0.11$이다.

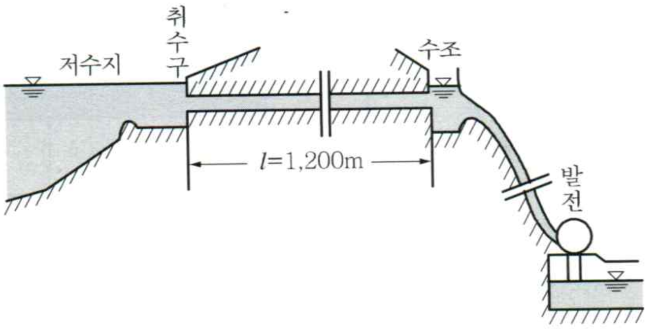


그림 4-24

(풀이) 총손실수두 $\sum h_n = h_e + h_o + h_{cb} + h_L$

$$= (f_e + f_o + f_{cb} + f\frac{l}{D})\frac{V^2}{2g}$$

$$V = \frac{4Q}{\pi D^2} = \frac{4 \times 18}{3.14 \times 3.2^2} = 2.24m/\sec$$

$$n = 0.015 \ (\text{표}4-2)$$

$$f = \frac{124.6n^2}{D^{1/3}} = \frac{124.6 \times 0.015^2}{3.2^{1/3}} = 0.019$$

$$\sum h_n = (0.5 + 1.0 + 0.11 + 0.019 \times \frac{1,200}{3.2}) \times \frac{2.24^2}{2 \times 9.8} = 2.236m$$

4.4 관수로 해석 (관로 유량 구하기)

<단일 관수로내의 흐름>

[1] 두 수조를 연결하는 등단면 관수로

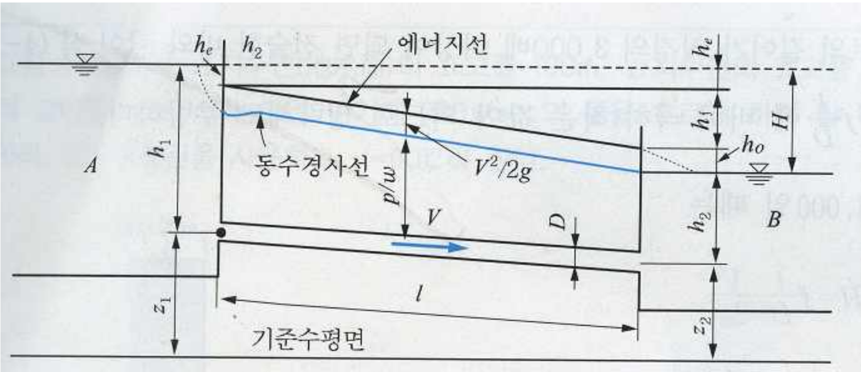


그림 4-27 관수로의 각종 손실수두

$$H = \sum h_n = h_e + f_L + h_o$$

$$= f_e \frac{V^2}{2g} + f \frac{l}{D} \frac{V^2}{2g} + f_0 \frac{V^2}{2g}$$

$$= \frac{V^2}{2g}\left(f_e + f \frac{l}{D} + f_0\right)$$

$$V = \sqrt{\frac{2gH}{f_e + f\frac{l}{D} + f_0}}$$ (모든 손실을 고려했을 때의 유속)

여기서 f_e : 유입손실계수 = 0.5

f_o : 유출손실계수 = 1.0 일때

$$V = \sqrt{\frac{2gH}{1.5 + f\frac{l}{D}}}$$

유량 $Q = AV = \frac{\pi D^2}{4}\sqrt{\frac{2gH}{1.5 + f\frac{l}{D}}}$

관경 $D = 0.6075\left[(1.5D + fl)\frac{Q^2}{H}\right]^{1/5} (m)$

위 식에서 D를 구하기 위해 시산법을 사용해야 한다.

만약 $\frac{l}{D} > 3000$인 장관(long pipe line)인 경우

$$D = 0.6075[fl\frac{Q^2}{H}]^{1/5}\,(m)$$

<예제 4.13> 그림과 같은 경우 관에 흐르는 유량 및 레이놀드 수를 구하라. 단 $f=0.0184, \nu=1.14\times10^{-6}m^2/\sec$이다.

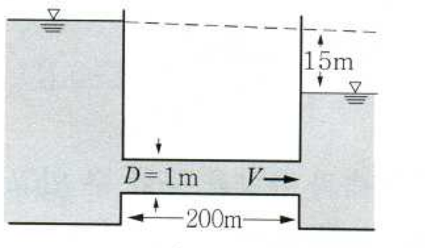


그림 4-28

풀이) $H=(f_e+f_o+f\dfrac{l}{D})\dfrac{V^2}{2g}$

$$15=(0.5+1.0+0.0184\times\frac{200}{1.0})\frac{V^2}{2\times9.8}$$

$$V=7.53m/\sec$$

$$R_e=\frac{VD}{\nu}=\frac{7.53\times1.0}{1.14\times10^{-6}}=6.6\times10^6$$

$$Q=\frac{\pi D^2}{4}V=\frac{3.14\times1^2}{4}\times7.53=5.91m^3/\sec$$

<예제 4.14> 그림에서 A 저수지 수면 표고를 100m, B 저수지 수면 표고를 92.6m, 관수로 길이를 4250m라 하면 여가에 280$l/\sec$의 물이 흐르게 할 때의 관경을 구하라. 단 주철관을 사용하고 $f=0.02$이다.

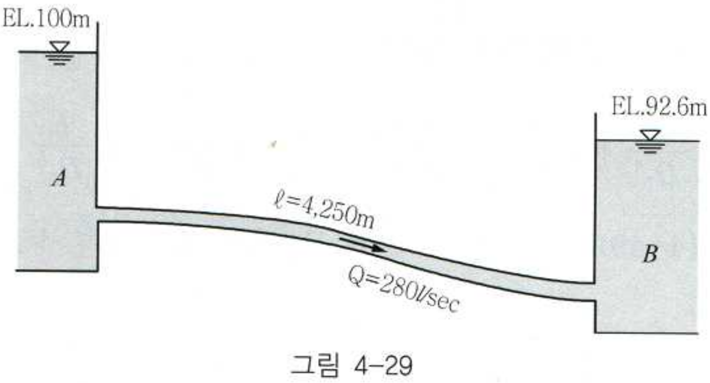


그림 4-29

(풀이) $H=100-92.6=7.4m$

$$D=0.6075\left[(1.5D+fl)\frac{Q^2}{H}\right]^{1/5}(m)$$

$$D=0.6075\left[(1.5D+0.02\times4250)\times\frac{0.28^2}{7.4}\right]^{1/5}$$

계산기를 이용하여 시산법으로 계산하면 D=0.595m이고, 이것에 근접한 규격품의 직경으로 600mm 있다.

$\therefore D = 600mm$

[2] 두 수조를 연결하는 부등단면 관수로

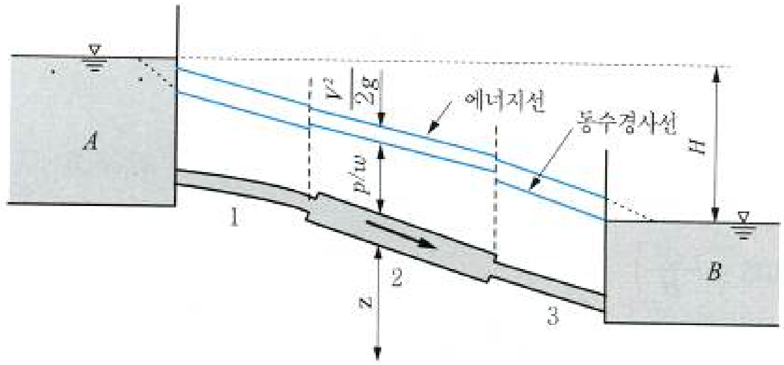


그림 4-30 단면이 변화하는 관수로의 손실수도

총손실수두 : H

$$H = f_e \frac{V_1^2}{2g} + f \frac{l_1}{D_1} \frac{V_1^2}{2g} + f_{ae} \frac{V_2^2}{2g} + f_2 \frac{l_2}{D_2} \frac{V_2^2}{2g} + f_{ac} \frac{V_3^2}{2g} + f_3 \frac{l_3}{D_3} \frac{V_3^2}{2g} + f_o \frac{V_3^2}{2g}$$

연속방정식에서 $V = \frac{Q}{A} = \frac{4Q}{\pi D^2}$ 이므로 다음과 같이 된다.

$$H = 0.08271 \left(\frac{f_e}{D^4} + f_1 \frac{l_1}{D_1^5} + \frac{f_{ae}}{D_2^4} + f_2 \frac{l_2}{D_2^5} + \frac{f_{ac}}{D_3^4} + f_3 \frac{l_3}{D_3^5} + \frac{f_o}{D_3^4} \right) Q^2$$

그런데 보통의 정도를 요하는 관수로 즉 l/D > 3000 : 장관(long pipe) 일 때 마찰이외의 손실은 무시해도 좋다.

[3] 노즐(Nozzle)을 붙인 관수로

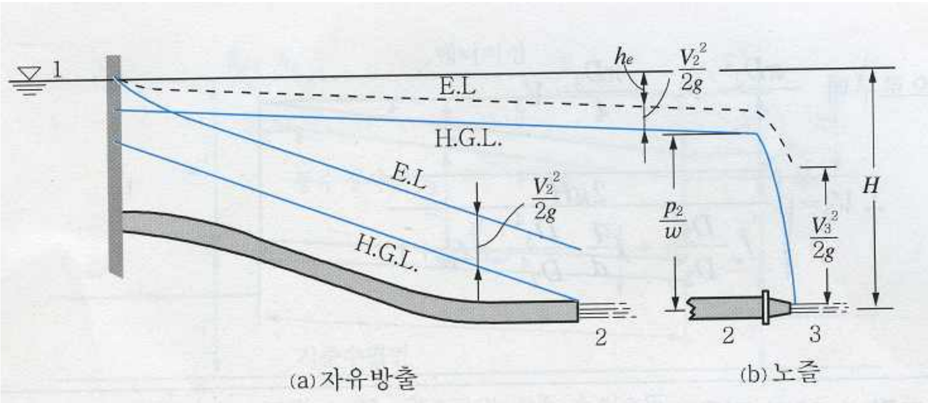


그림 4-25

총손실수두 : H

$$H = h_e + h_L + h_{gc} + h_o$$
$$= f_e\frac{V_2^2}{2g} + f\frac{l}{D}\frac{V_2^2}{2g} + f_{gc}\frac{V_3^2}{2g} + \frac{V_3^2}{2g}$$

마찰이외의 손실을 무시하면

$$H = f\frac{l}{D}\frac{V_2^2}{2g} + \frac{V_3^2}{2g}$$

연속방정식에서

Q = AV

$$\frac{\pi D_2^2}{4}V_2 = \frac{\pi D_3^2}{4}V_3$$

$\therefore\ V_2 = (\frac{D_3}{D_2})^2 V_3$ 이것을 대입하면

$$H = f\frac{l}{D_2}(\frac{D_3}{D_2})^4 V_3^2 + V_3^2 = \frac{V_3^2}{2g}(f\cdot\frac{D_3^4}{D_2^4}\cdot l + 1)$$

$$\therefore\ V_3 = \sqrt{\frac{2gH}{f\cdot l\cdot\frac{D_3^4}{D_2^4} + 1}}$$

[4] 사이폰(siphone or syphone)

고수조에서 저수조로 관수로를 통해 물을 송수할 때 관의 일부가 동수경사선보다 높이 있는 관수로

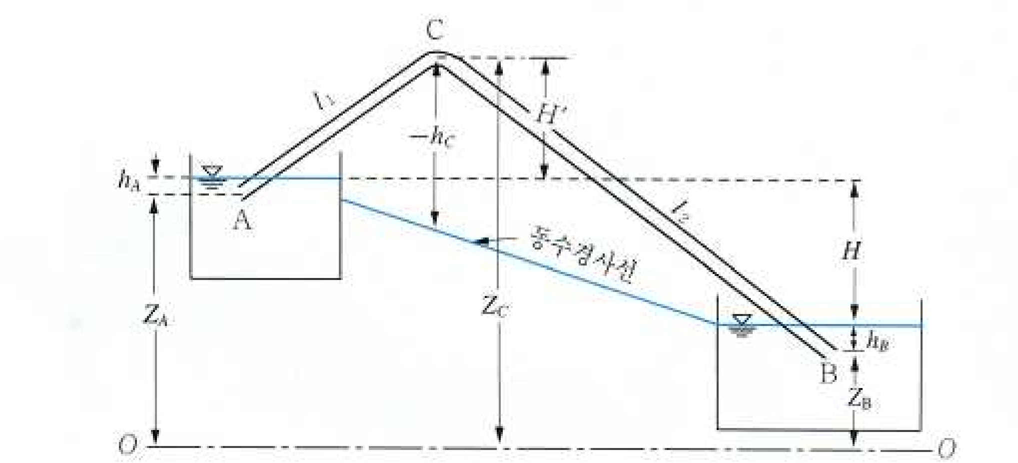


그림 4-43

사이폰 ACB에 생기는 총손실수두를 H라 하면

$$H = \sum h_n = h_e + h_{L1} + h_{cb} + h_{L2} + h_o$$

$$= f_e \frac{V^2}{2g} + f\frac{l_1}{D}\frac{V^2}{2g} + f_{cb}\frac{V^2}{2g} + f\frac{l_2}{D}\frac{V^2}{2g} + f_o\frac{V^2}{2g}$$

$$V = \sqrt{\frac{2gH}{f_e + f\frac{l_1+l_2}{D} + f_{cb} + f_o}}$$

사이폰의 유량은 다음식과 같다.

$$Q = \frac{\pi D^2}{4}\sqrt{\frac{2gH}{f_e + f\frac{l_1+l_2}{D} + f_{cb} + f_o}}$$

다음 사이폰 정점 C점의 압력수두를 구하기 위해 A와 C점에 베르누이정리를 적용하면

$$Z_A + h_A = Z_c - h_c + \frac{V^2}{2g} + (f\frac{l_1}{D} + f_e + f_{cb})\frac{V^2}{2g}$$

$$-h_c = (Z_A + h_A) - \left[Z_c + (1 + f\frac{l_1}{D} + f_e + f_{cb})\frac{V^2}{2g}\right]$$

$$p_c = p_a - wh_c$$

이론상 가능한 최소값은 p_c=0이므로

$$h_c = \frac{p_a}{w} = \frac{10.33}{1} = 10.33m \fallingdotseq 8m$$

양 수조의 수면차 H의 한도를 구하면

$$H_{\max} = \frac{f_o + f\frac{l_1+l_2}{D} + f_e + f_{cb}}{1 + \frac{l_1}{D} + f_e + f_{cb}}(H' + 8)\ (m)$$

여가서 $H' = Z_A + h_A - Z_c$

사이폰 흐름 특징 : ① 사이폰내의 압력은 부압(-)이다

② C점의 압력은 언제나 대기압보다 낮다.
따라서 $h_c = 8m$ 이내(이론상 높이는 10m)이다.

<예제 4,15> 그림 4-44와 같이 저수지의 물을 방류하기 위해 사이폰을 설치하였다. 낙차 12m, 관길이는 정점 상류부가 5.6m, 하류뷰가 18.4m, 관의 직경이 800mm인 경우 사이폰이 작동 가능한지 검토하고 가능하다면 유속과 유량을 구하라 마찰손실계수 $f = 0.025$, 유입손실계수 $f_e = 0.04$, 만곡손실계수 $f_{cb} = 0.294$이다.

(풀이) $V = \sqrt{\dfrac{2gH}{f_e + f\dfrac{l_1 + l_2}{D} + f_{cb} + f_o}}$

$$= \sqrt{\frac{2 \times 9.8 \times 12}{0.04 + 0.025\dfrac{24}{0.8} + 0.294 + 1.0}}$$

$$= 10.62 m/\sec$$

$$-h_c = (Z_A + h_A) - \left[Z_c + (1 + f\frac{l_1}{D} + f_e + f_{cb})\frac{V^2}{2g}\right]$$

$$= (10.5 + 3) - \left[11.5 + (1 + 0.025\frac{5.6}{0.8} + 0.04 + 0.294)\frac{10.62^2}{2 \times 9.8}\right]$$

$$= -6.68m \quad h_c < 8.0m, \quad \therefore \text{사이폰 작동 가능}$$

$$Q = \frac{\pi D^2}{4} V = \frac{3.14 \times 0.8^2}{4} \times 10.62 = 5.34 m^3/\sec$$

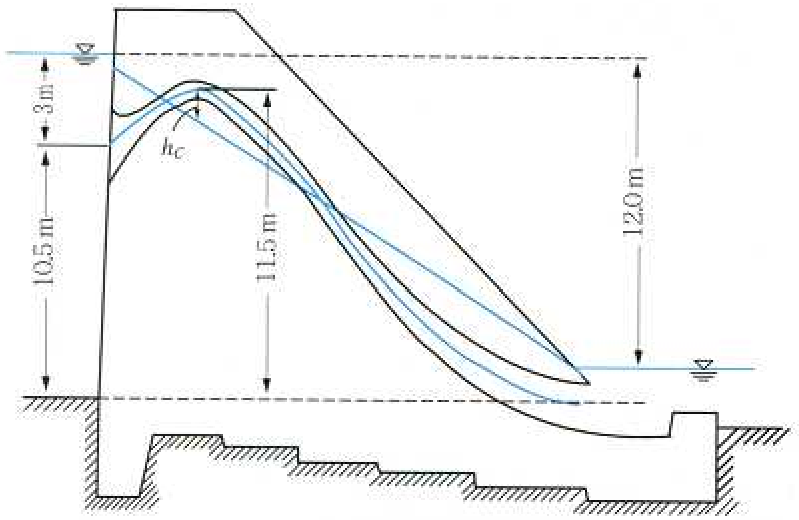


그림 4-44

<예제 4.16> 사이폰의 정점이 저수지 수면보다 5m 높은 위치이고 저수지로부터 관의 길이가 10m일 때 관의 직경이 500mm라면 이 사이폰에 흐를수 있는 최대유량은 얼마인가? 단 만곡손실계수 $f_{cb} = 0.3$, 마찰손실계수 $f = 0.03$이다.

(풀이) $Z_A + h_A = Z_c - h_c + \dfrac{V^2}{2g} + (f\dfrac{l_1}{D} + f_e + f_{cb})\dfrac{V^2}{2g}$

$H' = Z_A + h_A - Z_c$, $Z_c > Z_A + h_A$이므로

$\therefore H' < 0$, 최대 $h_c = \dfrac{p_a}{w}$

$$V_{\max} = \sqrt{\frac{2g(\frac{p_a}{w} - h_c)}{1 + f\frac{l_1 + l_2}{D} + f_e + f_{cb}}}$$

$\dfrac{p_a}{w} = 8m$, $H' = 5m$를 대입하면

$$V_{\max} = \sqrt{\frac{2 \times 9.8(8-5)}{1 + 0.03\frac{10}{0.5} + 0.5 + 0.3}}$$

$$= 4.95 m/\sec$$

$$Q_{\max} = \frac{\pi D^2}{4} V_{\max} = \frac{3.14 \times 0.5^2}{4} \times 4.95 = 0.97 m^3/\sec$$

<복합 관수로내의 흐름 해석>

[1] 다지(多枝) 관수로 (Branched pipe line)

1. 저수지 군 상호간의 송배수시 필요
2. 저수지 주위에 대한 각 관의 유량 계산
3. 해석법 : 연속방정식과 Bernoulli 정리를 연립으로 해석
   시산법
   도식법

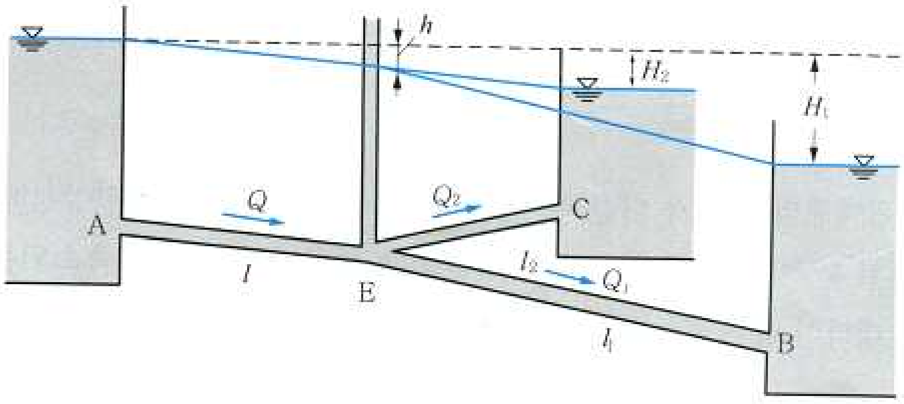


그림 4-31

소손실을 무시하고 마찰손실만 고려하고

AEC관로 총손실수두는 다음식과 같다.

$$H_1 = f\frac{l}{D}\frac{V^2}{2g} + f_1\frac{l_1}{D_1}\frac{V_1^2}{2g} \qquad (1)$$

또 AEB관로 총손실수두는 다음식과 같다.

$$H_2 = f\frac{l}{D}\frac{V^2}{2g} + f_2\frac{l_2}{D_2}\frac{V_2^2}{2g} \qquad (2)$$

$Q = AV,\ V = \dfrac{4Q}{\pi D^2}$ 으로부터

$$V^2 = \left[\frac{4Q}{\pi D^2}\right]^2$$

$$V_1^2 = \left[\frac{4Q_1}{\pi D_1^2}\right]^2$$

$$V_2^2 = \left[\frac{4Q_2}{\pi D_2^2}\right]^2$$

이것들을 식 (1),(2)에 대입하여 간단히 하면

$$H_1 = 0.08271\left[f\frac{lQ^2}{D^5} + f_1\frac{l_1Q_1^2}{D_1^5}\right] \qquad (3)$$

$$H_2 = 0.08271\left[f\frac{lQ^2}{D^5} + f_2\frac{l_2Q_2^2}{D_2^5}\right] \qquad (4)$$

$Q = Q_1 + Q_2$ (5)

(3),(4),(5)를 연립하여 $Q, Q_{1,} Q_2$를 구할수 있다.

또 D, Q를 알고 분기관의 직경 D_1, D_2를 구하려면 (3),(4)식으로부터

$$D_1 = \left(\frac{f_1 l_1 Q_1^2}{\dfrac{H_1}{0.08271} - f\dfrac{lQ^2}{D^5}} \right)^{1/5} \quad (m) \quad (6)$$

$$D_2 = \left(\frac{f_2 l_2 Q_2^2}{\dfrac{H_2}{0.08271} - f\dfrac{lQ^2}{D^5}} \right)^{1/5} \quad (m) \quad (7)$$

소손실을 고려하는 경우 유량은 다음과 같이 구한다.

h : 분기 직전 손실수두

f_{br} : 분기 손실계수

Q = Q_1 + Q_2

각 저수지에 대한 손실수두는

h = $f_e \dfrac{V^2}{2g} + f\dfrac{l}{D}\dfrac{V^2}{2g}$ = $\dfrac{1}{2g}(\dfrac{4Q}{\pi D^2})^2 (f_e + f\dfrac{l}{D})$ = kQ^2 --- ①

H_1 - h = $f_{br}\dfrac{V_1^2}{2g} + f_1 \dfrac{l_1}{D_1}\dfrac{V_1^2}{2g} + \dfrac{V_1^2}{2g}$ = $\dfrac{1}{2g}(\dfrac{4Q_1}{\pi D_1^2})^2 (f_{br} + f_1\dfrac{l_1}{D_1} + 1)$ = $k_1 Q_1^2$ --- ②

H_2 - h = $\dfrac{1}{2g}(\dfrac{4Q_2}{\pi D_2^2})^2 (f_{br} + f_2\dfrac{l_2}{D_2} + 1)$ = $k_2 Q_2^2$ --- ③

②식과 ③식에서 h를 소거하면

H_1 = h + $k_1Q_1^2$ = kQ^2 + $k_1Q_1^2$

= $k(Q_1 + Q_2)$ + $k_1Q_1^2$ --- ④

H_1 = h + $k_2Q_2^2$ = kQ^2 + $k_2Q_2^2$

= $k(Q_1 + Q_2)$ + $k_2Q_2^2$ --- ⑤

④ × H_2 - ⑤ × H_1 하면

$H_1H_2 = H_2\{k(Q_1 + Q^2) + k_1Q^2\}$

-) $H_1H_2 = H_1\{k(Q_1 + Q^2) + k_2Q^2\}$

이 식을 Q_2^2으로 나누어 정리하면

$\{(H_2 - H_1)k + H_2k_1\}(Q_1/Q_2)^2 + 2(H_2 - H_1)k(Q_1/Q_2) + \{(H_2 - H_1)k - H_1k_2\} = 0$ ⑥

이 식으로부터 Q_1/Q_2을 구하면 ④식과 ⑤식에서 Q_1과 Q_2를 구할 수 있다.

<예제 4.17> 그림에서 $l_1 = 50m, l_2 = 300m, l = 80m, D = 200mm$ 이고 A에서 유량 $34l/\sec$를 B에서 $18l/\sec$를 송수할 때 D_1 및 D_2의 크기를 구하라. 단 모든 관의 마찰손실 계수는 0.02이다.

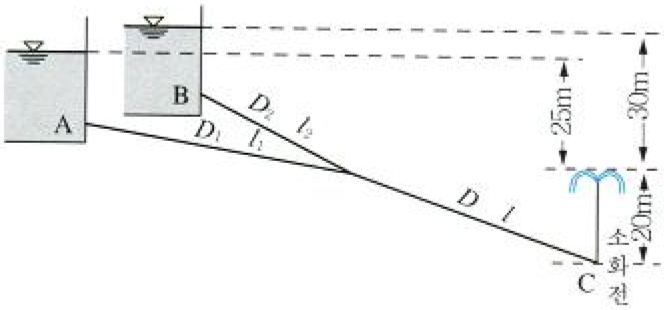


그림 4-32

(풀이) $H_1 = 25m, H_2 = 30m$

$f = f_1 = f_2 = 0.02$

$Q_1 = 0.034m^3/\sec, Q_2 = 0.018m^3/\sec$

$$D_1 = \left[\frac{f_1 l_1 Q_1^2}{\frac{H_1}{0.0827} - f\frac{lQ^2}{D^5}}\right]^{1/5}$$

$$= \left[\frac{0.02 \times 500 \times 0.034^2}{\frac{25}{0.0827} - 0.02 \times \frac{800 \times 0.052^2}{0.2^5}}\right]^{1/5}$$

$$= 0.15m$$

$\therefore D_1 = 150mm$

같은 방법으로 D_2를 구하면

$D_2 = 100mm$

[2] 합류(合流) 관수로

분기관수로를 역순으로 계산해 구할 수 있다.

<예제 4.18> 그림과 같은 분기관에서 A, B, C의 저수조를 관으로 연결할 경우 각 관로로 흐르는 유량을 계산하라.

단 $D_1 = 0.3m, D_2 = 0.2m, D_3 = 0.4m$, $l_1 = 600m, l_2 = 500m, l_3 = 1800m$

(풀이) ①번 관로의 손실수두

$$h = 0.08271\left(\frac{f_e}{D_1^4} + f_1\frac{l_1}{D_1^5} + \frac{f_b}{D_1^4}\right)Q_1^2$$

$$= 0.08271\left(\frac{0.5}{0.3^4} + 0.02\frac{600}{0.3^5} + \frac{0.2}{0.3^4}\right)Q_1^2 = 415.59Q_1^2 \qquad (1)$$

저수조 A와 B의 사이에는

$$(h_A - h_B) - h = (60-20) - h = 0.08271\left(f_2\frac{l_2}{D_2^5} + \frac{f_o}{D_2^4}\right)Q_2^2 \qquad (2)$$

$$= 0.08271\left(0.02\frac{500}{0.2^5} + \frac{1.0}{0.2^4}\right)Q_2^2$$

저수조 A와 C사이에는

$$(h_A - h_C) - h = (60-8) - h = 0.08271\left(f_3 \frac{l_3}{D_3^5} + \frac{f_o}{D_3^4}\right) Q_3^2 \qquad (3)$$

$$= 0.08271\left(0.02\frac{1800}{0.4^5} + \frac{1.0}{0.4^4}\right) Q_3^2$$

식 (2)로부터 $40 - h = 2636.38\,Q_2^2$ (4)

식 (3)로부터 $52 - h = 294.01\,Q_3^2$ (5)

식 (1)로부터 $h = 415.59\,Q_1^2$ (6)

연속방정식으로부터 $Q_1 = Q_2 + Q_3$ (7)

식 (4), (5), (6), (7)를 연립하여 h, Q_1, Q_2, Q_3에 대해 풀이하면

$$Q_1 = \sqrt{\frac{h}{415.59}}$$

$$Q_2 = \sqrt{\frac{40-h}{2636.38}}$$

$$Q_3 = \sqrt{\frac{52-h}{294.01}}$$

$$\sqrt{\frac{h}{415.59}} = \sqrt{\frac{40-h}{2636.38}} + \sqrt{\frac{52-h}{294.01}}$$

$$h = 34.602m$$

$$Q_1 = \sqrt{\frac{34.602}{415.59}} = 0.288m^3/\sec$$

$$Q_2 = \sqrt{\frac{40-34.602}{2636.38}} = 0.045m^3/\sec$$

$$Q_3 = \sqrt{\frac{52-34.602}{294.01}} = 0.243m^3/\sec$$

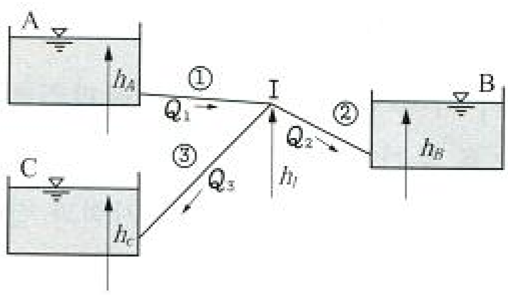


그림 4-33

[3] 병렬관수로(looping pipe line or parallel pipe line)

관수로의 도중에서 수개의 관수로로 나누어진 것이 하류에서 합쳐져서 하나의 관수로로 이루어지는 것

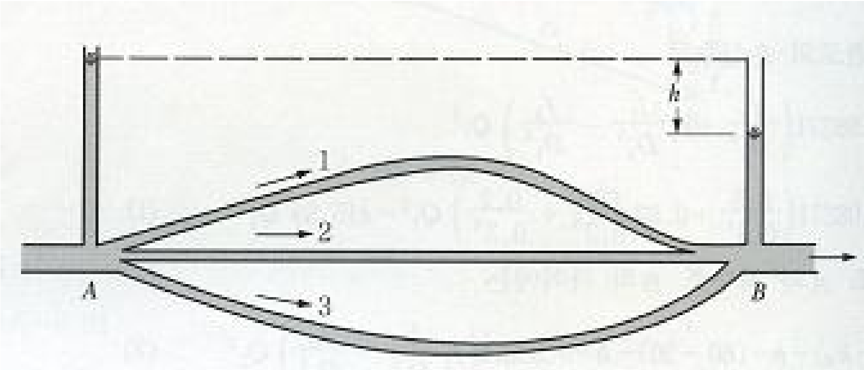


그림 4-34

$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3$

$h = h_1 = h_2 = h_3$

각 코스별 손실수두는 다음과 같다.

$$\sum h = \left(f\frac{l}{D} + \sum f_n\right)\frac{V^2}{2g} = h$$

1코스의 유속을 V_1이라하면

$$V_1 = \sqrt{\frac{2gh}{f\frac{l_1}{D_1} + \sum f_n}}$$

$$Q_1 = A_1\sqrt{\frac{2gh}{f\frac{l_1}{D_1} + \sum f_n}} = k_1\sqrt{h}$$

여기서 $k_1 = A_1\sqrt{\frac{2g}{f\frac{l_1}{D_1} + \sum f_n}}$

같은 방법으로

$Q_2 = k_2\sqrt{h},\ Q_3 = k_3\sqrt{h}$

따라서 유량 Q는

$$Q = (k_1 + k_2 + k_3)\sqrt{h}$$

<예제 4.19> 그림 4-35에서 $H = 8.7m, l_1 = 3{,}000m, l_2 = 730m,\ \ l_3 = 600m, l_4 = 300m,$ $d_1 = 300mm, d_2 = 200mm,\ d_3 = 250mm, d_4 = 250mm$일 때 각 관로의 유속과 유량을 구하라. 단 모든 관의 마찰계수 $f = 0.02$이다.

(풀이) $k_1 = f_1\frac{l_1}{d_1} = 0.02 \times \frac{3{,}000}{0.3} = 200$

$$k_2 = f_2\frac{l_2}{d_2} = 0.02 \times \frac{730}{0.3} = 73$$

$$k_3 = f_3\frac{l_3}{d_3} = 0.02 \times \frac{600}{0.25} = 48$$

$$k_4 = f_4 \frac{l_4}{d_4} = 0.02 \times \frac{300}{0.25} = 24$$

$$\lambda_2 = \sqrt{k_2} = \sqrt{73} = 8.54, \quad \lambda_3 = \sqrt{k_3} = \sqrt{48} = 6.93$$

$h_2 = h_3$이므로

$$f_2 \frac{l_2}{d_2} \frac{V_2^2}{2g} = f_3 \frac{l_3}{d_3} \frac{V_3^2}{2g}$$

$$\lambda_2 V_2 = \lambda_3 V_3$$

$$8.54 V_2 = 6.93 V_3 \qquad (1)$$

$Q_1 = Q_2 + Q_3$로부터

$$\frac{\pi d_1^2}{4} V_1 = \frac{\pi d_2^2}{4} V_2 + \frac{\pi d_3^2}{4} V_3$$

$$0.3^2 V_1 = 0.2^2 V_2 + 0.25^2 V_3 \qquad (2)$$

$Q_1 = Q_4$로부터

$$\frac{\pi d_1^2}{4} V_1 = \frac{\pi d_4^2}{4} V_4$$

$$0.3^2 V_1 = 0.25^2 V_4 \qquad (3)$$

관로 A-B의 총손실수두 $H = h_{L1} + h_{L2} + h_{L4}$

$$H = k_1 \frac{V_1^2}{2g} + k_2 \frac{V_2^2}{2g} + k_4 \frac{V_4^2}{2g}$$

$$8.7 \times (2 \times 9.8) = 200 V_1^2 + 73 V_2^2 + 24 V_4^2 \qquad (4)$$

식 (1), (2), (3), (4)를 연립하여 V_1, V_2, V_3, V_4에 대해 풀이하면

$V_1 = 0.76 m/\sec,\ V_2 = 0.59 m/\sec,\ V_3 = 0.73 m/\sec,\ V_4 = 1.09 m/\sec$

$Q = \frac{\pi d^2}{4} V$로부터 $Q_1 = Q_4 = 0.054 m^3/\sec,\ Q_2 = 0.019 m^3/\sec,\ Q_3 = 0.035 m^3/\sec$

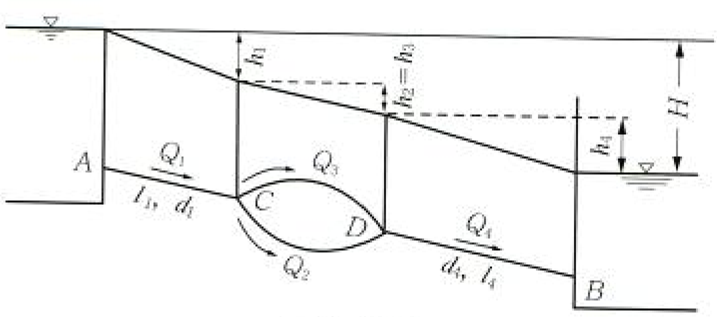


그림 4-35

<관망의 해석>

= 관망(pipe network)

상수도의 배수관과 같이 다수의 분기관, 합류관 및 굴곡관 등의 관이 합쳐서 하나의 관계통을 이루는 것

· 격자관망 효과

1. 관로의 끝 막힘으로 인한 수질악화 방지
2. 관로의 일부 고장으로 인한 단수 방지

※ [Hardy -cross의 관망해석법]※

기본 가정

1. 각 분기점에 유입하는 유량은 그 점에 멈추지 않고 전부 유출한다.

   즉 $\sum Q = 0$ 조건 : 교차점 방정식

2. 각 폐합관에서 시계방향(+), 반시계방향 (-)으로 흐르는 관로의 손실수두의 합은 0이다.

   즉 $\sum h = 0$ 조건 : 폐합회로 방정식

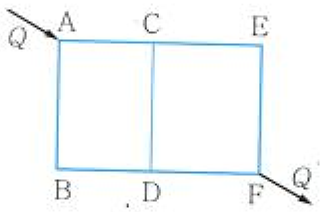


그림 4-36

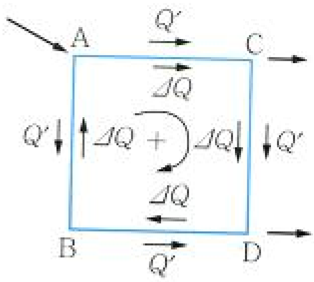


그림 4-37

Darcy - Cross 의 마찰손실수두

h = $f\frac{l}{D}\frac{V^2}{2g}$

= $f\frac{l}{D}\frac{1}{2g}(\frac{4Q}{\pi D^2})^2$

$h = kQ^2$

일반식 $h = kQ^n$

여기서 $k = f\frac{l}{D}\frac{1}{2g}(\frac{4}{\pi D^2})^2$

① f에 V가 포함되어 있지 않으면

n = 2 사용

$h = kQ^2$

ex) Manning 공식 등 $f = \dfrac{12.7gn^2}{D^{1/3}}$

② f에 V가 포함되어 있을 때

n = 1.85 사용

$h = kQ^{1.85}$

ex) Hazen William 공식 등

실제유량을 Q, 처음 가정유량 Q', 보정해야할 유량 ΔQ라 하고 이에 대응하는 손실수두를 $h, h', \Delta h$라 하면

$$Q = Q' + \Delta Q \qquad h = h' + \Delta h$$

손실수두로서 마찰손실수두만 고려하면

$$h = kQ^2 = k(Q' + \Delta Q)^2 = kQ'^2 + 2kQ'\Delta Q + k(\Delta Q)^2$$

보정유량 ΔQ가 작을 때는 $(\Delta Q)^2$을 무시할수 있으므로

$$h' + \Delta h = kQ'^2 + 2kQ'\Delta Q$$

$$\therefore \Delta h = 2kQ'\Delta Q$$

그림 4-36의 관망에 대해서 생각하면 먼저 이것을 ACDBA와 CEFDC의 2개의 폐합회로로 나눈다. 1개 회로 ACDBA 의 손실수두 대수합응 다음과 같다.

$$\sum h = h_{AC} + h_{CD} + h_{DB} + h_{BA} = 0$$

따라서

$$\sum h = \sum h' + \sum \Delta h = 0$$

$$\therefore \sum h' = -\sum \Delta h = -\sum -2kQ'\Delta Q$$

$$\therefore \Delta Q = -\frac{\sum h'}{2\sum kQ'}$$

1개 폐합회로 (I)의 보정해야할 유량 ΔQ는 다음 식과 같다.

㉓ - $(\Delta Q)_I = \left(\dfrac{-\Sigma kQ'^2}{2\Sigma kQ'}\right)_I = \left(\dfrac{-\sum h'}{2\sum kQ'}\right)_I$ 보정유량(보정치) 공식

= 계산방법 =

① 각 관로의 k값을 식 $k = f\dfrac{l}{D}\dfrac{1}{2g}\left(\dfrac{4}{\pi D^2}\right)^2$를 사용하여 미리 계산해 놓는다.

② 각절점에서 $\sum Q = 0$를 만족하도록 각 관로의 첫 번째 가정유량 Q'_1를 정한다.

③ 식 $\Delta Q = \dfrac{-\sum h'}{2\sum kQ'}$를 사용하여 각 폐합회로에 대해 보정유량을 구한다.

④ 두 번째 가정유량을 정한다. 그림 4-37에서 보는 바와 같이 각 회로에서 가정유량(Q') 과 방향이 같으면 Q' + ΔQ하고 반대이면 Q' - ΔQ를 한다.

⑤ 각 회로의 보정유량이 $\Delta Q \fallingdotseq 0$이 될 때까지 ②~④의 과정을 반복한다.

<예제 4.20> 그림 3-38과 같은 배수관망에서 각 관의 유량을 구하라. 단 $n = 0.013$이다.

(풀이) $f = \dfrac{124.6n^2}{D^{1/3}}$

$$k = f\frac{l}{D}\left(\frac{4}{\pi D^2}\right)^2 = \frac{124.6n^2}{D^{1/3}}\frac{l}{D}\left(\frac{4}{\pi D^2}\right)^2$$
$$= \frac{10.29n^2 l}{D^{16/3}}$$

각 관의 k값을 구하면

$k_1 = 322.0$
$k_2 = 94.1$
$k_3 = 429.6$
$k_4 = 58.0$

다음에 각 관의 유량과 흐름방향을 그림 4-39와 같이 정하여 우회전을 정(+)으로 하여 다음 표에 따라 계산한다.

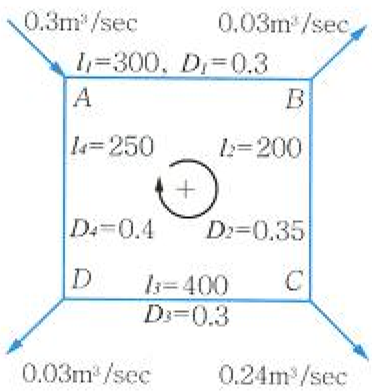


그림 4-38

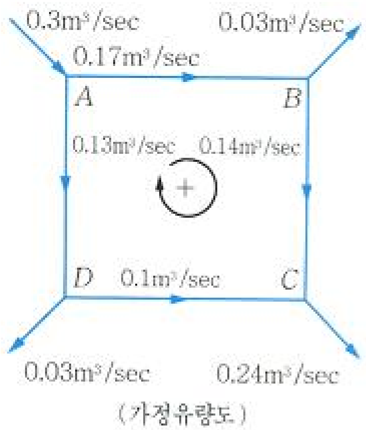


그림 4-39

표 4-8

관 로	k	가정유량 $Q'(m^3/sec)$	$k\,Q'$	$h_l' = kQ'^2$	보정량 $\Delta Q(m^3/sec)$
A-B	322.0	0.17	54.74	+9.306	-0.025
B-C	94.1	0.14	13.17	+1.844	-0.025
C-D	429.6	0.10	42.96	-4.296	+0.025
D-A	58.0	0.13	7.54	-0.980	+0.025
계			$\sum kQ' = 118.41$	$\sum h_l' = 5.874$	

$$\Delta Q = \frac{-\sum kQ'^2}{2\sum kQ'} = -\frac{5.874}{2\times118.41} = -0.025\,\mathrm{m^3/sec}$$

제1차계산 ; $\Delta Q = -0.025m^3/\mathrm{sec}$를 가정유량 Q'에 가하여 나온 값을 다시 가정유량으로 하여 반복 계산한다.(예:$0.17-0.025=0.145m^3/\mathrm{sec}$)

표 4-9

관 로	k	$Q'(m^3/sec)$	$k\,Q'$		$\Delta Q(m^3/sec)$
A-B	322.0	0.145	46.69	+6.770	+0.0004
B-C	94.1	0.115	10.82	+1.244	+0.0004
C-D	429.6	0.125	53.70	-6.713	-0.0004
D-A	58.0	0.155	8.99	-1.393	-0.0004
계			$\sum kQ' = 120.20$	$\sum h_1' = -0.092$	

$$\Delta Q = \frac{-\sum kQ'^2}{2\sum kQ'} = \frac{-(-0.092)}{2\times120.20} = 0.0004\,\mathrm{m^3/sec}$$

표 4-10

관 로	k	가정유량 $Q'(m^3/sec)$	$k\,Q'$		보정량 $\Delta Q(m^3/sec)$
A-B	322.0	0.1454	46.82	+6.808	
B-C	94.1	0.1154	10.86	+1.253	
C-D	429.6	0.1246	53.53	-6.669	
D-A	58.0	0.1546	8.47	-1.387	
계			$\sum kQ' = 120.18$	$\sum h_1' = +0.005$	

$$\Delta Q = \frac{-\sum kQ'^2}{2\sum kQ'} = \frac{-0.005}{2\times120.18} = -0.00002\,\mathrm{m^3/sec}$$

이 결과로부터 $\sum h' = \sum kQ'^2 = 0.005 \fallingdotseq 0$으로 보아도 좋으므로 이 계산으로 구한 결과를 최종적인 유량으로 결정한다.

<예제 4.21> 그림 4-40과 같은 관망에서 관의 직경, 길이 및 k의 값이 표와 같을 때 각 관로의 유량을 계산하라.

표 4-11

관로번호	길이 l (m)	직경 D	k
①	80	0.30	117
②	70	0.25	260
③	104	0.15	5,270
④	140	0.15	7,100
⑤	60	0.20	695
⑥	140	0.30	206
⑦	116	0.25	430

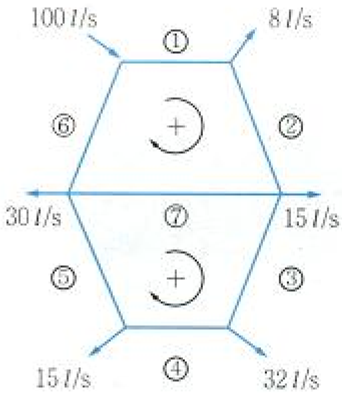


그림 4-40

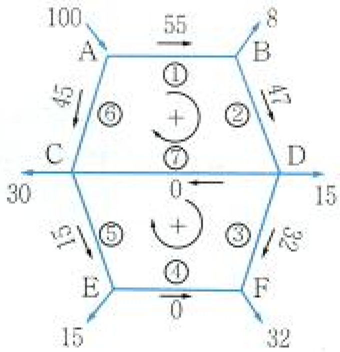


그림 4-41

풀이) 1차 가정유량을 그림 4-41과 같이 가정하여, 각 관의 손실수두를 계산하여 가정 유량을 각 회로에 대해 구하여 최종적인 유량을 그림 4-42와 같이 구했다.

표 4-12 제1회 가정유량

관로망 ABDCA				관로망 CDFEC			
관로 번호	Q'(m³/sec)	kQ'	kQ'^2	관로 번호	Q'(m³/sec)	kQ'	kQ'^2
①	0.055	6.43	0.354	③	0.032	168.7	5.40
②	0.047	12.21	0.574	④	0.000	0.0	−0.00
⑦	0.000	0.00	0.000	⑤	0.015	10.4	−0.16
⑥	0.045	9.27	−0.417	⑦	0.000	0.0	−0.00
계		27.91	0.511	계		179.1	5.24
$\Delta Q=\frac{-0.511}{2\times 27.91}=-0.009(\mathrm{m^3/sec})$				$\Delta Q=\frac{-5.24}{2\times 179.1}=-0.015(\mathrm{m^3/sec})$			

표 4-13 제2회 가정유량

관로망 ABCDA				관로망 CDFEC			
관로 번호	Q'(m³ /sec)	kQ'	kQ'^2	관로 번호	Q'(m³ /sec)	kQ'	kQ'^2
①	0.055−0.009 =0.046	5.38	0.248	③	0.032−0.015 =0.017	89.6	1.522
②	0.047−0.009 =0.038	9.88	0.376	④	0.000+0.015 =0.015	106.6	−1.598
⑦	0.000−0.009 +0.015=0.006	2.58	0.015	⑤	0.015+0.015 =0.030	20.8	−0.624
⑥	0.045+0.009 =0.054	11.12	−0.600	⑦	0.000−0.009 +0.015=0.006	2.6	−0.016
계		28.96	0.039	계		219.6	−0.716
$\Delta Q=\frac{-0.039}{2\times 28.96}=-0.0007(\mathrm{m^3}/s)$				$\Delta Q=\frac{0.716}{2\times 219.6}=0.0016(\mathrm{m^3}/s)$			

표 4-14 제3회 가정유량

관로망 ABCDA				관로망 CDFEC			
관로 번호	Q'(m³/sec)	kQ'	kQ'^2	관로 번호	Q'(m³/sec)	kQ'	kQ'^2
①	0.046−0.0007 =0.0453	5.30	0.240	③	0.017+0.0016 =0.0186	98.02	1.823
②	0.038−0.0007 =0.0373	9.70	0.362	④	0.015−0.0016 =0.0134	95.14	−1.275
⑦	0.006−0.0007 −0.0016=0.0037	1.59	0.006	⑤	0.030−0.0016 =0.0284	19.14	−0.561
⑥	0.054+0.0007 =0.0547	11.27	−0.616	⑦	0.006−0.0007 −0.0016=0.0037	1.59	−0.006
계		27.86	−0.008	계		214.49	−0.019
$\Delta Q=\dfrac{0.008}{2\times27.86}=0.00014(\text{m}^3/s)$				$\Delta Q=\dfrac{0.019}{2\times214.49}=0.00004(\text{m}^3/s)$			

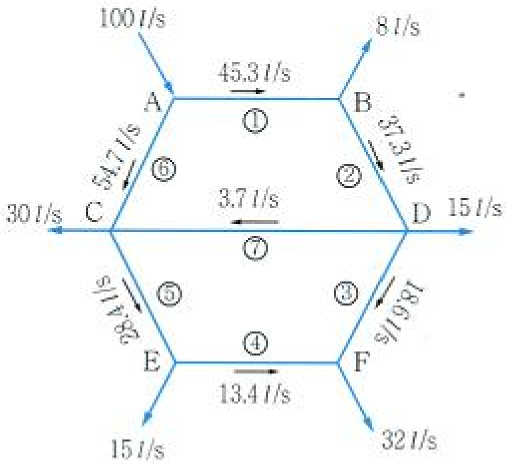


그림 4-42

HARDY CROSS법 포트란 프로그램 (사용방법 및 예제풀이는 군산대 수리학 홈피 참조)

```
C*****************************************************************C
C*****************************************************************C
C*****************************************************************C

      PROGRAM PIPENET
C        관망 계산 프로그램(HARDY CROSS 방법)
C        각 관로의 수두손실은 HAZEN WILLIAM의 공식을 사용하여 계산함
C      주어진 연결점에서 고도와 압력을 토대로 하여 각 연결점의 압력을 구함
C
      CHARACTER*60 TITLE
        DIMENSION LOOP(20,10),NR(20),P(100),Q(100),JI(100),JF(100)
        DIMENSION IR(100),FRIC(100),TE(100),HLOSS(100)
        REAL LGTH
        DO 5 I=1,100
    5   P(I)=999.
C
C        아래에 열거한 관망 자료 입력
C
C        NRS : 관로 수
C        NOD : 연결점 수
C        LPS : 폐회로수
C        ITER : 반복횟수
C        TOLQ : 유량 허용오차 한계
C        TOLH : 수두 허용오차 한계
C        PKW : 관로에 유량이 유입하는 압력
C        NKW : 관로에 유량이 유입하는 유입구의 연결점 번호
C        JZ : 폐회로에 관련된 관로 수
C        LOOP : 폐회로에 관련된 관로 번호(부호-는 유량의 흐름 방향이 반시계 방향임을
나타냄)
C
        OPEN(1,FILE='INPUT.DAT',STATUS='UNKNOWN')
        OPEN(2,FILE='OUTPUT.DAT')
        READ(1,8) TITLE
        WRITE(2,9)
        READ(1,*) NRS,NOD,LPS,ITER,TOLQ,TOLH,PKW,NKW
    8 FORMAT(A60)
```

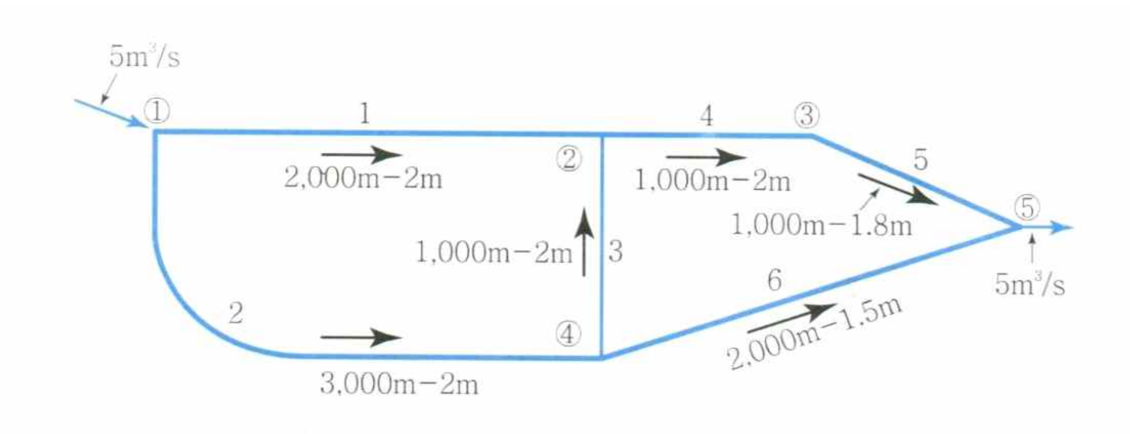
```
   9   FORMAT(/, 13X, ' 계산 결과')
C
       DO 10 N=1,LPS
       READ(1,*)JZ,(LOOP(N,I),I=1,JZ)
       WRITE(2,15)N,JZ,(LOOP(N,I),I=1,JZ)
  15   FORMAT(///,5X,I2,'번 폐회로 안의 관로수 = ',I2,'-----',20I5)
       NR(N)=JZ
  10   CONTINUE
       P(NKW)=PKW
C
C      각 관로의 자료 입력
C
C      L :      관로 번호
C      JI() : 관로 시점 번호
C      JF() : 관로 종점 번호
C      LGTH : 관로 길이
C      D() : 관로 내경
C      Q() : 관로 가정 유량
C      C : HAZEN WILLIAMS 계수
       WRITE(2,18)
  18   FORMAT(/5X,'관로 정보 '/6X,'관로번호 시점     종점','     길이
     +      내경       가정 유량        H-W 계수')
       DO 20 I=1,NRS
       READ(1,*) L,JI(L),JF(L),LGTH,D,Q(L),C
       WRITE(2,19)L,JI(L),JF(L),LGTH,D,Q(L),C
  19   FORMAT(3X,3I8,F10.2,F9.2,F11.3,2X,F8.0)
       IR(I)=L
  20   FRIC(L)=10.63*LGTH/((C**1.85)*(D**4.87))
C
C      각 폐회로에 대하여 계산
C
       DO 32 IT=1,ITER
       LOK=0
       DO 31 K=1,LPS
       SUMH=0.0
       SUMZ=0.0
       IW=NR(K)
       DO 25 IL=1,IW
       S1=1
       S2=1
       L=LOOP(K,IL)
```

```
      IF(L)21,25,22
   21 S1=-1
      L=-L
   22 FW=Q(L)
      IF(FW)23,24,24
   23 S2=-1
      FW=-FW
   24 H=S1*S2*FRIC(L)*FW**1.85
      Z=1.85*FRIC(L)*FW**0.85
      SUMH=SUMH+H
      SUMZ=SUMZ+Z
   25 CONTINUE
      FCORR=SUMH/SUMZ
C
C     폐회로의 유량 보정
C
      DO 28 IRL=1,IW
      L=LOOP(K,IRL)
      IF(L)26,28,27
   26 L=-L
      Q(L)=Q(L)+FCORR
      GO TO 28
   27 Q(L)=Q(L)-FCORR
   28 CONTINUE
C
C     허용값에 대한 수정계수 검증
C
      TEST=ABS(FCORR)-TOLQ
      IF(TEST)30,30,29
   29 TEST=ABS(SUMH)-TOLH
      IF(TEST)30,30,31
   30 LOK=LOK+1
   31 CONTINUE
      IF(LPS.LE.LOK) GO TO 33
   32 CONTINUE
C
C     각 연결점의 고도 입력 및 압력 계산
C
C     N : 연결점 번호
C     TE(N) : 연결점 N에 해당하는 높이
   33 WRITE(2,34)
```

```
34    FORMAT(/5X,'연결점 정보'/6X,'연결점         높이(M)')
      DO 36 I=1,NOD
      READ(1,*)N,TE(N)
36    WRITE(2,37)N,TE(N)
37    FORMAT(7X,I3,4X,F8.4)
      DO 38 I=1,NRS
      L=IR(I)
      S=1
      IF(Q(L).LT.0.0) S=-1
38    HLOSS(L)=S*FRIC(L)*(ABS(Q(L)))**1.85
39    IFLAG=0
      DO 50 K=1,NRS
      I=IR(K)
      JUPS=JI(I)
      JDOW=JF(I)
      IF(P(JUPS)-999.)40,42,42
40    IF(P(JDOW)-999.)50,41,41
41    P(JDOW)=P(JUPS)-HLOSS(I)+TE(JUPS)-TE(JDOW)
      GO TO 50
42    IF(P(JDOW)-999.)44,43,43
43    IFLAG=1
      GO TO 50
44    P(JUPS)=P(JDOW)+HLOSS(I)-TE(JUPS)+TE(JDOW)
50    CONTINUE
      IF(IFLAG.EQ.1) GO TO 39
      WRITE(2,51)IT
51    FORMAT(//,8X,I3,'번 반복후 ',/,5X,'관로번호     유량(CMS)')
      DO 52 I=1, NRS
52    WRITE(2,53)I,Q(I)
53    FORMAT(//,8X,I3,4X,F6.3)
      WRITE(2,54)
54    FORMAT(/5X,'각 연결점에서 수주로 나타낸 압력',/4X,
     +'연결점 번호         압력(M)')
       DO 55 I=1,NOD
55    WRITE(2,56)I,P(I)
56    FORMAT(10X,I3,8X,F7.3)
      CLOSE(1)
      CLOSE(2)
99    CONTINUE
      END PROGRAM PIPENET
```

<예제4-22> 관망계산 예제 (EXAMPLE 5-14, 이재수 저 ,수리학 P214)

그림과 같은 관망 시스템에 외부와의 유입 및 유출이 있을 때 각관의 유량을 계산하라. 각관의 유속계수 C=100 이다.



입력자료(INPUT.DAT)

```
6 5 2 50 0.001 0.005 100. 1
3  1 -2 -3
4  3  4  5  -6
1  1  2  2000.0  2.00  2.50  100.
2  1  4  3000.0  2.00  2.50  100.
3  4  2  1000.0  2.00  1.00  100.
4  2  3  1000.0  2.00  1.00  100.
5  3  5  1000.0  1.80  3.50  100.
6  4  5  2000.0  1.50  1.50  100.
1 0.
2 0.
3 0.
4 0.
5 0.
```

계산결과(OUTPUT.DAT)

```
1번 폐회로 안의 관로수 =  3-----    1    -2    -3
```

2번 폐회로 안의 관로수 = 4----- 3 4 5 -6

관로 정보

관로번호	시점	종점	길이	내경	가정 유량	H-W 계수
1	1	2	2000.00	2.00	2.500	100.
2	1	4	3000.00	2.00	2.500	100.
3	4	2	1000.00	2.00	1.000	100.
4	2	3	1000.00	2.00	1.000	100.
5	3	5	1000.00	1.80	3.500	100.
6	4	5	2000.00	1.50	1.500	100.

연결점 정보

연결점	높이(M)
1	0.0000
2	0.0000
3	0.0000
4	0.0000
5	0.0000

3번 반복후

관로번호	유량(CMS)
1	2.797
2	2.203
3	0.665
4	0.962
5	3.462
6	1.538

각 연결점에서 수주로 나타낸 압력

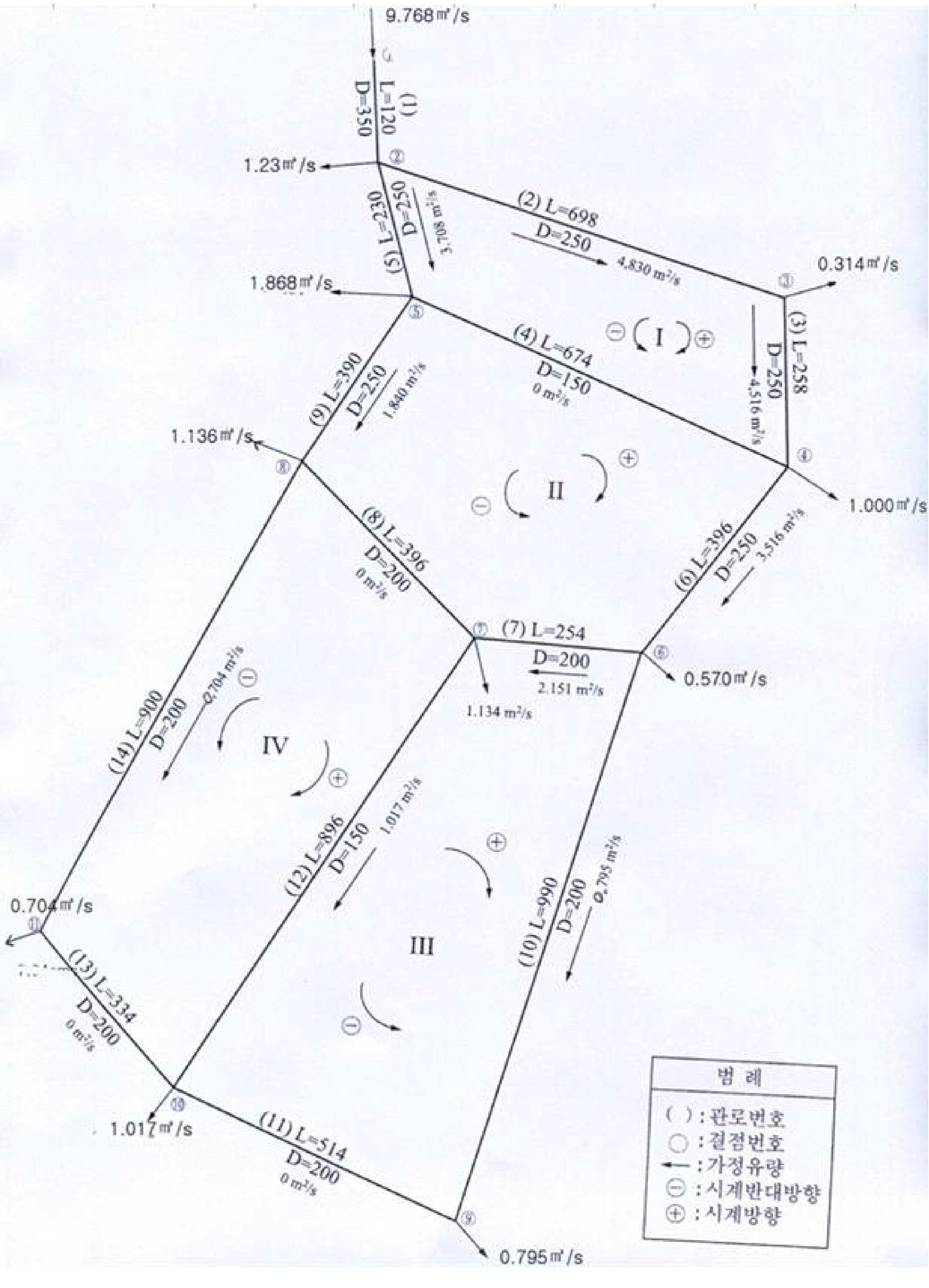
연결점 번호	압력(M)
1	100.000
2	99.028
3	98.960
4	99.062
5	97.755

관망해석 과제 문제(1)

(군산대 토목공학과 2학년 : 수리학강좌_제4장 관로해석)

아래 관망은 “가납지구” 관시스템이다. **Hardy Cross 법**에 의해 각관의 유량을 계산하라. 그림에서 관길이(L)의 단위는 m 이고, 관경(D)의 단위는 cm이다. 모든 관의 유속계수 C는 130이다. 그림에서 각관의 초기 가정유량(㎥/sec)이 표시되어 있다. 그리고 각 접합점의 표고는 다음과 같다.

접합점	표고(m)
1	0.0000
2	15.0000
3	17.0000
4	18.5000
5	11.0000
6	12.5000
7	9.0000
8	8.0000
9	4.5000
10	3.5000
11	3.5000


9.768㎥/s
(1) L=120
D=350
1.23㎥/s
(2) L=698
D=250
4.830 m³/s
(5) L=230
D=250
3.708 m³/s
0.314㎥/s
1.868㎥/s
(3) L=258
D=250
4.516 m³/s
(4) L=674
D=150
0 m³/s
I
(9) L=390
D=250
1.840 m³/s
1.136㎥/s
II
1.000㎥/s
(8) L=396
D=200
0 m³/s
(6) L=396
D=250
3.516 m³/s
(7) L=254
D=200
2.151 m³/s
0.570㎥/s
1.134 m³/s
(14) L=900
D=200
0.704 m³/s
IV
(12) L=896
D=150
1.017 m³/s
(10) L=990
D=200
0.795 m³/s
0.704㎥/s
III
(13) L=334
D=200
0 m³/s
1.017㎥/s
(11) L=514
D=200
0 m³/s
0.795㎥/s
범 례
( ) : 관로번호
○ : 절점번호
← : 가정유량
⊖ : 시계반대방향
⊕ : 시계방향

관망해석 과제 문제(2)

그림 7-14에 표시된 관망에서 교차점(1)에서의 압력수두를 측정하였더니 100 m이었다. 각 관에서의 유량과 개개 교차점에서의 압력수두를 Hardy-Cross 방법의 컴퓨터 프로그램에 의해 계산하라. 사용된 관은 주철관으로 가정하라($C_{HW}=130$). 관정 D와 관의 길이 L의 단위는 m이다.

1차 가정유량

$Q_1=0.05$ $Q_2=0.03$ $Q_3=0.03$ $Q_4=0.00$
$Q_5=0.02$ $Q_6=0.05$ $Q_7=0.02$ $Q_8=0.01$
$Q_9=0.01$ $Q_{10}=0.02$ $Q_{11}=0.01$ $Q_{12}=0.03$
$Q_{13}=0.05$ $Q_{14}=0.02$ $Q_{15}=0.03$

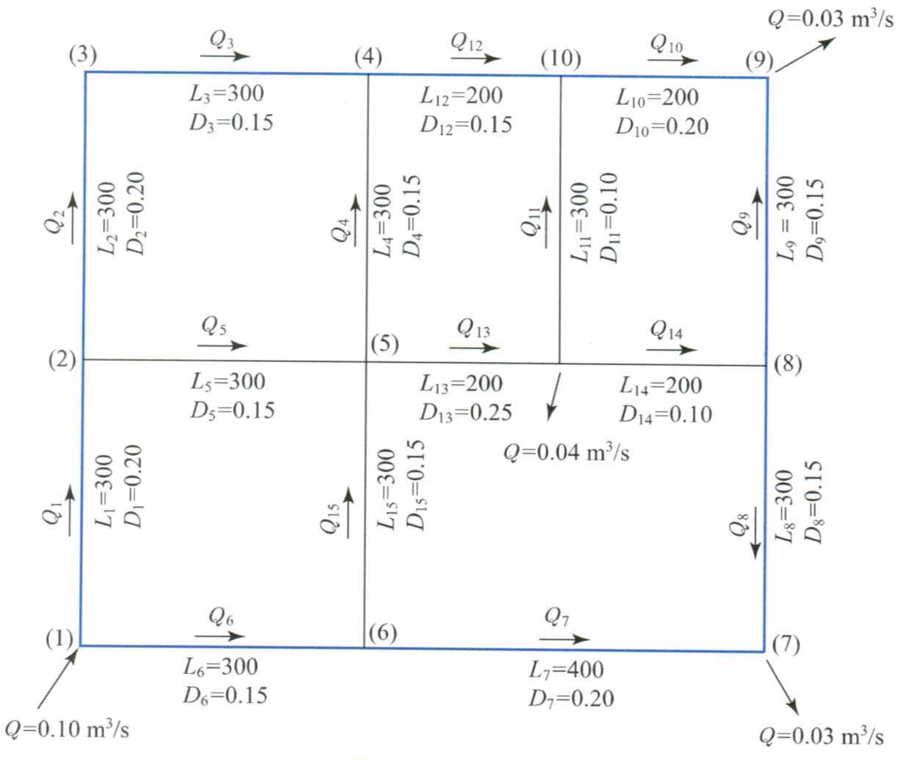


그림 7-14

위 과제를 관망 해석 컴퓨터 프로그램으로 풀어 **12월 14일** 까지 수리학홈페이지 **보고서함**에 제출하시기 바랍니다.

4.5 수력과 양수 (수차의 발전 출력 및 펌프 동력)

<관수로에 의한 유수의 동력>

- 동력(power) : 단위시간에 행하여지는 일
- 수차(turbine) : 물이 갖는 에너지를 동력으로 변환하는 기계
- 수마력 : 유수가 1초 동안 하는 일의 량

  단위 : W, KW, HP

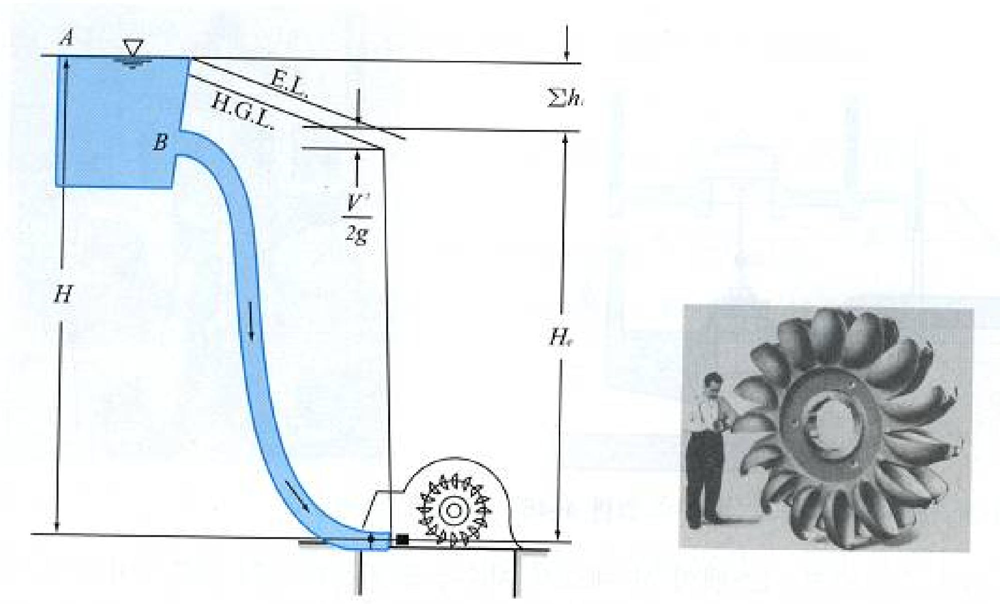


그림 4-47

높이 H 지점의 위치에너지는

$E = mgH$

발전 출력 유효수두는

$H_e = H - \sum h_n$

$E = mgH_e$, $m = \rho Q$

$= \rho Q g H_e$

$= \rho g Q H_e$, $w = \rho g$

$= wQH_e (kg \bullet m/\sec)$ --- ①

$1 joule = 1N \bullet m$

$1W = 1 joule/\sec$

$= 1N \bullet m/\sec$, $1N = \frac{1}{9.8} kg$

$= \frac{1}{9.8} kg \bullet m/\sec$

그런데

$1kW = 1000\,W$

$$1kW = 1000 \times \frac{1}{9.8} = 102kg \cdot m/\sec$$

$$\therefore 1kg \cdot m/\sec = \frac{1}{102}kW$$

이것을 1식에 대입하면

$w = 1000kg/m^3$

$$E = 1000\,QH_e \times \frac{1}{102}\,kW$$

$$= 9.8\,QH_e\,(kW)$$: 이론식

이때 효율을 η이라 하고

수차의 실제 출력을 E_T라 하면

$E_T = 9.8\eta QH_e(kW)$, $\eta = 75 - 85\%$

그리고

$1HP = 75kg \cdot m/\sec$

$1kg \cdot m/\sec = \frac{1}{75}HP$

이것을 ①식에 대입하면

$E = 1000\,QH_e \times \frac{1}{75}HP$

$= 13.3\,QH_e\ (HP)$: 이론식

실제는 $E_T = 13.3\eta QH_e(HP)$

㉔ - $E_T(kW) = 9.8\eta QH_e$
$E_T(HP) = 13.3\eta QH_e$
여기서 $\eta = \eta_T \cdot \eta_G$ = 75 - 85% (수차의 출력 공식)

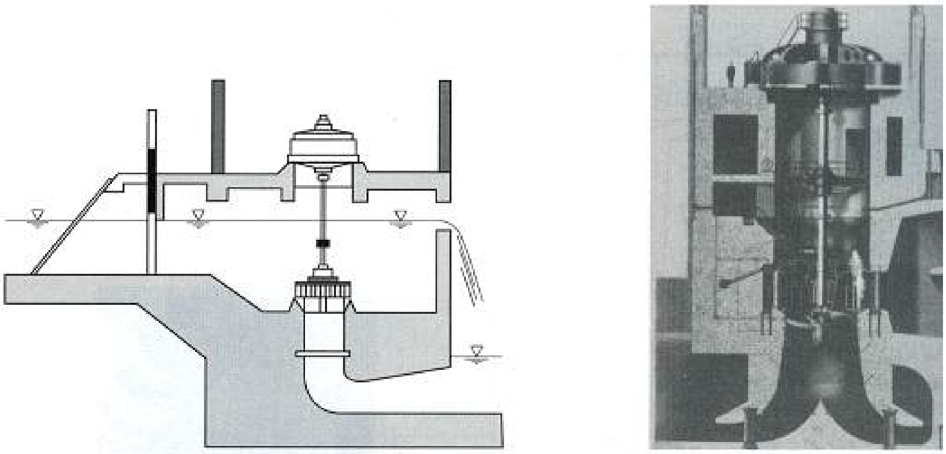


그림 4-46 수력발전시스템

[pump의 동력 공식]

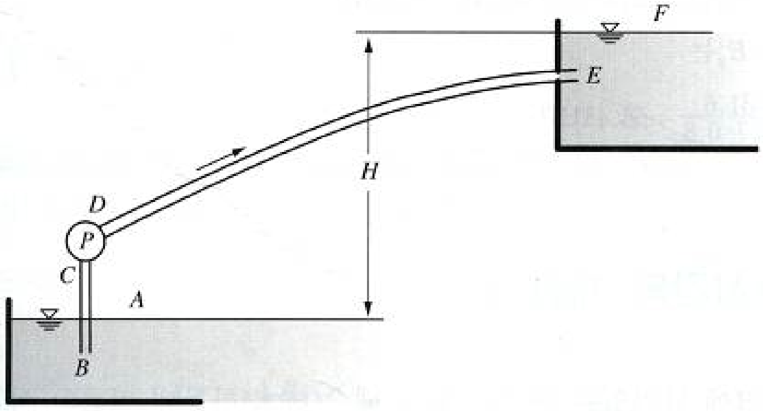


그림 4-48 두 저수지간의 펌프가 포함된 관로

유효 양정 H_e는 다음 식과 같다.

$$H_e = H + \sum h_n$$

펌프효율을 η라 하면 펌프의 동력 E_P는

㉕ - $E_P = \dfrac{9.8QH_e}{\eta}\,(KW)$

$$E_P = \frac{13.3QH_e}{\eta}\quad (HP)$$: 펌프의 출력 공식

<예제 4.7> *아래* 그림에서 처럼 총 낙차 68m, 사용수량 $8m^3/\sec$를 직경 2,000mm의 수압관으로 흐르게 할 때 이론수력은 얼마인가? 또 발전소 합성효율을 0.8이라 할 때 출력을 구하라. 단, 관에서의 유입손실계수를 $f_e = 0.3$, 만곡의 손실계수를 1개소에 대하여 $f_{cb} = 0.15$ (3개소 있음), 마찰손실계수 $f = 0.03$이다.

풀이) $E(kW) = 9.8QH = 9.8 \times 8 \times 68 = 5{,}331.2kW$

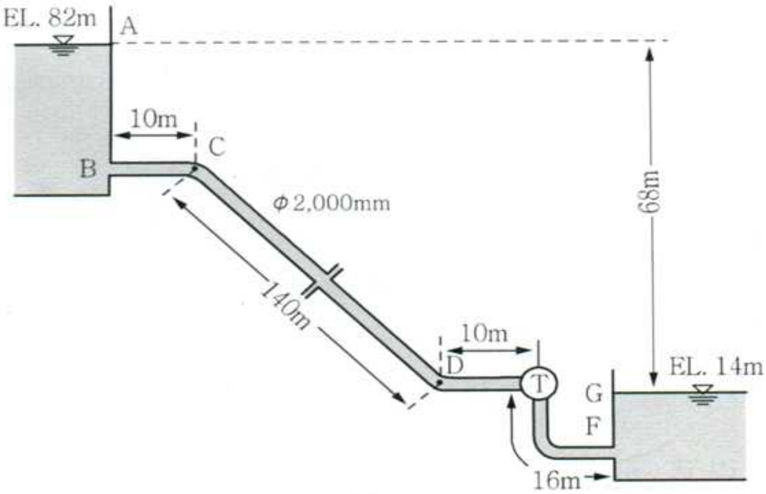
$$V = \frac{Q}{A} = \frac{4Q}{\pi D^2} = \frac{4 \times 8}{3.14 \times 2^2} = 2.548\,m/\sec$$

$$\sum h_l = (f_e + f\frac{l}{D} + 3 \times f_{cb} + f_o)\frac{V^2}{2g}$$

$$= (0.3 + 0.03 \times \frac{176}{2} + 3 \times 0.15 + 1)\frac{2.548^2}{2 \times 9.8} = 1.454\,m$$

$$H_e = H - \sum h_l = 68 - 1.454 = 66.546\,m$$

$$E(kW) = 9.8\eta QH_e = 9.8 \times 0.8 \times 8 \times 66.546 = 4{,}173.8 \fallingdotseq 4{,}200kW$$



<예제 4.8> 아래 그림과 같이 A에서 B로 펌프에 의하여 유량 $Q = 0.05\,m^3/\sec$를 송수할 때 펌프의 소요마력을 구하라. 단, 펌프의 효율 70%, 모터의 효율은 80%, 마찰손실계수 $f = 0.0234$, 만곡손실계수 $f_{cb} = 0.132$이다.

풀이) $A_1 = \frac{\pi}{4} d^4 = \frac{3.14 \times 0.15^2}{4} = 0.01765\, m^2$

$A_2 = 0.0707\, m^2$

$V_1 = \frac{Q}{A_1} = \frac{0.05}{0.01765} = 2.83\, m/s$

$V_2 = \frac{Q}{A_2} = \frac{0.05}{0.0707} = 0.707\, m/s$

손실의 계산

$h_e = 0.5 \frac{{V_1}^2}{2g} = 0.204\, m$

직경 0.15m 구간의 마찰손실수두

$h_{l1} = f \frac{l}{D} \frac{{V_1}^2}{2g} = 0.0234 \times \frac{45 + 1.57}{0.15} \times \frac{2.83^2}{2 \times 9.8} = 2.97\, m$

$h_{cb} = 0.132 \times \frac{2.83^2}{2 \times 9.8} = 0.054\, m$

$h_{ge} = \frac{(V_1 - V_2)^2}{2g} = \frac{(2.83 - 0.707)^2}{2 \times 9.8} = 0.23\, m$

직경 0.3m 구간의 마찰손실수두

$h_{l2} = f \frac{l}{D} \frac{{V_2}^2}{2g} = 0.0234 \times \frac{15}{0.30} \times \frac{0.707^2}{2 \times 9.8} = 0.03\, m$

$h_o = f_o \frac{{V_2}^2}{2g} = \frac{0.707^2}{2 \times 9.8} = 0.026\, m$

$\sum h_n = h_e + h_{l1} + h_{cb} + h_{ge} + h_{l2} + h_o = 3.51m$

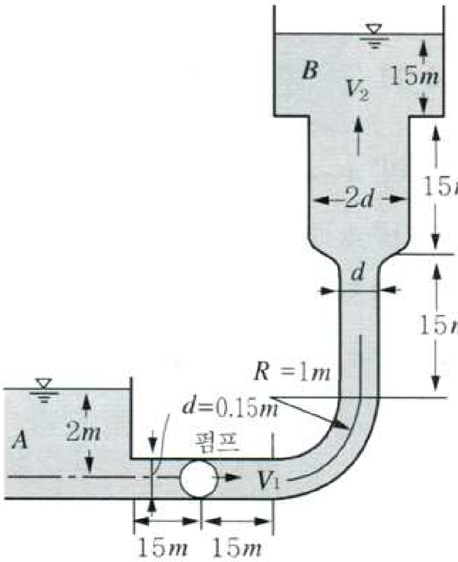
$H_e = (z_B - z_A) + \sum h_n = (46 - 2) + 3.51 = 47.51\, m$

펌프의 이론마력 E_o는

$E_o = 13.3 Q H_e = 13.3 \times 0.05 \times 47.51 = 31.6 HP$

실마력 E_p는

$E_p = \frac{13.3 Q H_e}{\eta} = \frac{31.6}{0.7 \times 0.8} = 56.43 HP$



4.6 배수시간의 계산

(1) 자유방출 배수시간

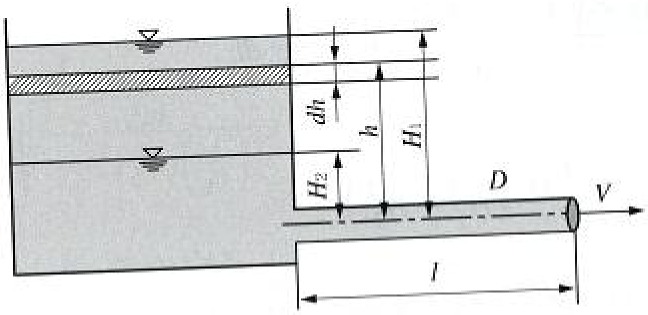


그림 4-50

$$h = (1 + f_e + f\frac{l}{D})\frac{V^2}{2g}$$

$$V = \sqrt{\frac{2gh}{1 + f_e + f\frac{l}{D}}}$$

관로 단면적을 a라 하면 미소시간 dt시간 동안 관로의 유출량은

$$dQ = aVdt = a\sqrt{\frac{2gh}{1 + f_e + f\frac{l}{D}}}\,dt$$

물탱크의 수면적를 A라 하면 유출량과 수조의 수위강하량은 동일하므로

$$dQ = -Adh$$

$$a\sqrt{\frac{2gh}{1+f_e+f\frac{l}{D}}}\,dt=-Adh$$

수면이 H_1에서 H_2까지 하강하는데 필요한 시간 t는

$$t=\int_0^t dt=-\frac{A\sqrt{1+f_e+f\frac{l}{D}}}{a\sqrt{2g}}\int_{H_1}^{H_2}\frac{1}{\sqrt{h}}dh$$

$$t=\frac{2A\sqrt{1+f_e+f\frac{l}{D}}}{a\sqrt{2g}}(H_1^{\frac{1}{2}}-H_2^{\frac{1}{2}})$$

완전 배수에 소요되는 시간은 $H_2=0$일때이다.

그리고 오리피스일 경우 배수시간은 $f_e=f=0$일 경우로 다음과 같다.

$$t=\frac{2A}{a\sqrt{2g}}(H_1^{\frac{1}{2}}-H_2^{\frac{1}{2}})$$

예제 4.25 $6m\times 6m$인 정사각형 수조에서 수로 바닥에 연결된 길이 120m의 관로를 통해 물을 배수하고 있다. 배수전의 수면고 $H_1=12m$이고 관의 직경이 220mm일 때 배수후 $H_2=6m$로 하강하는데 걸리는 시간을 구하라. 단 마찰손실계수 $f=0.035$이다.

풀이) $a=\frac{\pi D^2}{4}=\frac{3.14\times 0.22^2}{4}=0.038m^2$

$$t=\frac{2A\sqrt{1+f_e+f\frac{l}{D}}}{a\sqrt{2g}}(H_1^{\frac{1}{2}}-H_2^{\frac{1}{2}})$$

$$=\frac{2\times(6\times 6)\sqrt{1+0.5+0.035\times\frac{120.0}{0.22}}}{0.038\sqrt{2\times 9.8}}(12^{\frac{1}{2}}-6^{\frac{1}{2}})$$

$$=1944.6\sec \fallingdotseq 32\text{분}\,25\text{초}$$

(2) 두 수조가 연결된 경우의 배수시간

$$V=\sqrt{\frac{2gh}{1+f_e+f\frac{l}{D}}}$$

관로 단면적을 a라 하면 미소시간 dt시간 동안 흘러간 수량을 dQ라 하면 다음 식과 같다.

$$dQ=aVdt=a\sqrt{\frac{2gh}{1+f_e+f\frac{l}{D}}}\,dt$$

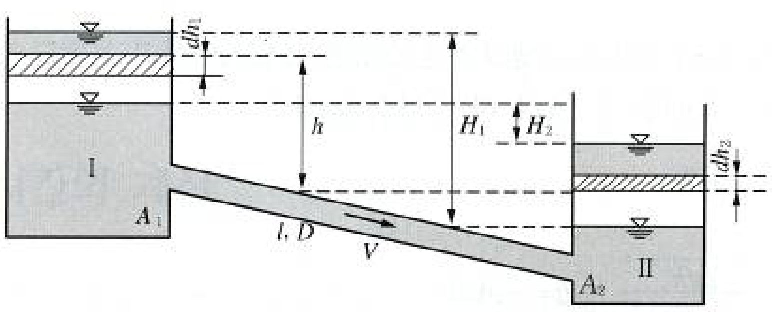


그림 4-51

I, II 수조의 단면적을 A_1, A_2라 하고 수조 I의 수면이 dh_1만큼 하강할 때 수조 II의 수면이 dh_2 만큼 상승하게 되므로 다음과 같다.

$$A_1 dh_1 = A_2 dh_2$$

$dh = dh_1 + dh_2$ 이므로

$$dh_1 = \frac{A_2}{A_1 + A_2} dh \text{ 또는 } dh_2 = \frac{A_1}{A_1 + A_2} dh$$

dt시간 동안 수조 I의 감소수량은 $A_1 dh_1$이고 dQ와 같다.

$$dQ = -A_1 dh_1$$

따라서

$$-A_1 \frac{A_2}{A_1 + A_2} dh = a \sqrt{\frac{2gh}{1 + f_e + f\frac{l}{D}}} dt$$

$$dt = -\frac{\sqrt{1 + f_e + f\frac{l}{D}}}{a\sqrt{2g}} \frac{A_1 A_2}{A_1 + A_2} \frac{dh}{\sqrt{h}}$$

수면차 H_1이 H_2로 되기 위한 시간은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$t = -\frac{\sqrt{1 + f_e + f\frac{l}{D}}}{a\sqrt{2g}} \frac{A_1 A_2}{A_1 + A_2} \int_{H_1}^{H_2} \frac{dh}{\sqrt{h}}$$

$$t = \frac{2A_1 A_2}{A_1 + A_2} \frac{\sqrt{f_e + f_o + f\frac{l}{D}}}{a\sqrt{2g}} (H_1^{\frac{1}{2}} - H_2^{\frac{1}{2}})$$

A_2가 매우 넓은 저수지라면 $A_2 \rightarrow \infty$가 되어 다음과 같이 된다.

$$t = 2A_1 \frac{\sqrt{1 + f_e + f\frac{l}{D}}}{a\sqrt{2g}} (H_1^{\frac{1}{2}} - H_2^{\frac{1}{2}})$$

예제 4.26 넓은 저수지 A_1에서 $A_2 = 50m^2$인 수조로 1,000m의 주철관으로 연결하여 처

음 수위차가 2.5m였던 것을 1시간내에 동수위로 하려면 관의 크기는 얼마로하면 되나? 단 마찰손실만 고려하고 $n=0.013$이다.

풀이)

$$t=\frac{A_1A_2}{A_1+A_2}\frac{\sqrt{f_e+f_o+f\dfrac{l}{D}}}{a\sqrt{2g}}(H_1^{\frac{1}{2}}-H_2^{\frac{1}{2}})$$

$A_1=\infty, 1+f_e=0$이므로

$$t=2A_2\frac{\sqrt{f\dfrac{l}{D}}}{a\sqrt{2g}}(H_1^{\frac{1}{2}}-H_2^{\frac{1}{2}})$$

$f=\dfrac{124.6n^2}{D^{1/3}}$ 이므로

$$t=2A_2\frac{\sqrt[0]{\dfrac{124.6n^2}{D^{1/3}}\dfrac{l}{D}}}{a\sqrt{2g}}(H_1^{\frac{1}{2}}-H_2^{\frac{1}{2}})$$

$$3,600=2\times50\times\frac{\sqrt{\dfrac{124.6\times0.013^2}{D^{1/3}}\dfrac{1,000}{D}}}{\dfrac{3.14D^2}{4}\sqrt{2\times9.8}}\times(2.5)^{\frac{1}{2}}$$

$$100.9=5.84D^{-\frac{8}{3}}$$

$$\therefore D=0.344m$$